CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Loi gaussiennes/normales

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si X est une variable aléatoire à densité et dont f_{m,σ^2} est une densité.

Dans ce texte, on vérifie que f_{m,σ^2} est bien une densité et montrons que la variance de X est σ^2 (on a déjà vu en cours que X admet une espérance et que $\mathbb{E}[X] = m$).

On dit ainsi que X est une variable aléatoire gaussienne (ou normale) de moyenne m et de variance σ^2, ou encore que X est une variable aléatoire qui suit la loi gaussienne (ou normale) de moyenne m et de variance σ^2.

1 Calcul de l'intégral de Gauss

Vérifions que f est bien une densité :

(i) f est bien positive

(ii) f est bien continue sauf éventuellement en un nombre fini de points (elle est même continue)

(iii) On montre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. En faisant le changement de variable $y = x + m$ puis le changement de variable $z = \sqrt{2}\sigma y$, on voit qu'il suffit de montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ou encore, par parité, que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1}$$

Pour montrer (1), introduisons la fonction $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt, \qquad x \geq 0.$$

Montrons que G est dérivable et calculons sa dérivée. Pour cela, soit $A > 0$ et montrons que G est dérivable sur $[0, A]$. Soit $\Psi : [0, 1] \times [0, A] \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$\Psi(t, x) = \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}.$$

La fonction Ψ admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, x) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

Cette quantité est continue en t, et on a la domination

$$\forall t \in [0,1], \forall x \in [0,A], \qquad \left|\frac{\partial \Psi}{\partial x}(t,x)\right| \leq 2A.$$

La fonction $2A$ ne dépend pas de x et est intégrable sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale et en déduire que G est dérivable, de dérivée

$$G'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt.$$

Le changement de variable $u = tx$ donne

$$G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2I'(x)I(x) \qquad \text{avec} \quad I(x) = \int_0^x e^{-u^2} du.$$

En intégrant (on remarque que $2I'(x)I(x)$ est la dérivée de $I(x)^2$), on en déduit que pour tout $x \geq 0$

$$G(x) - G(0) = -(I(x)^2 - I(0)^2).$$

Comme $G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \pi/4$, on obtient

$$G(x) = \frac{\pi}{4} - I(x)^2.$$

Or $0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, donc $G(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. On en déduit que $I(x) \to \pi/4$ quand $x \to \infty$. Donc

$$\left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit (1).

2 Calcul de la variance d'une loi gaussienne

Soit X une variable aléatoire $\mathcal{N}(0,1)$. Comme $\mathbb{E}[X] = 0$, la variance de X vaut $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2]$. D'après le théorème de transfert (pour la fonction positive $x \mapsto x^2$) :

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Pour calculer cette intégrale, on intègre par parties (en posant $u = x$ et $v' = xe^{-x^2/2}$ de sorte que $u' = 1$ et $v = -e^{-x^2/2}$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-xe^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

car $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ est une densité sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{E}[X^2] = 1$.

On montre de même que la variance d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est σ^2.