CPES 2 – Probabilités approfondies 2015-2016

Feuille d'exercices 2 : variables aléatoires

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Exercice 1. Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire. Soient $B, B' \in \mathcal{E}$ disjoints (c'est-à-dire tels que $B \cap B' = \emptyset$). Montrer que $\mathbb{P}(X \in B \text{ et } X \in B') = 0$.

Exercice 2. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On pose

$$X(1) = 0, \quad X(2) = 0, \quad X(3) = X(4) = -1, \quad X(5) = X(6) = 1.$$

(1) Démontrer que X est une variable aléatoire à valeurs dans un espace qu'on précisera.

(2) Quelle est la loi de X ?

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\geq 1}$ un système complet d'événements. On rappelle que cela signifie que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$, que $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ et que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ définie par $X(\omega) = i$, où i est tel que $\omega \in A_i$. Montrer que X est une variable aléatoire discrète.

Exercice 4. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F(x) = 1 - e^{-x}$ si $x \geq 0$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Exercice 5. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X de l'exercice 2.

Exercice 6. Soient $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ et $Y : (\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}') \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires de même loi. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

Exercice 7. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que la loi conjointe de (X, Y) vérifie $\mathbb{P}(X = j, Y = k) = a(j + k)/2^{j+k}$.

(1) Quelle est la valeur de a ? On pourra utiliser le fait que $\sum_{k\geq 0} k/2^k = 2$.

(2) Déterminer les lois marginales de X et Y.

(3) Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

Exercice 8. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telles que que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

(i) Déterminer la loi de $X + Y$. (On pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

(ii) Soit $n \geq 0$ un entier. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = n$.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F de l'exercice 4. Soit Y une variable aléatoire dont la loi est la probabilité conditionnelle de X sachant que $X \leq \ln(2)$. Tracer la fonction de répartition de Y.

Exercice 10. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 11. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.

Exercice 12. Une personne dispose de trois cartes identiques en tout point sauf en ce qui concerne la couleur. La première carte est rouge sur les deux faces, la deuxième est blanche sur les deux faces et la troisième est rouge d'un côté et blanche de l'autre.

(1) Elle tire au hasard une carte et en présente au hasard une des faces. Vous ne voyez que la face présentée et on vous demande de parier sur la couleur de la face cachée. Quel serait votre choix ?

(2) Que se passerait-il si en fait, la personne ne choisit pas au hasard la face de la carte qu'elle présente, mais si elle présente toujours la face de couleur rouge lorsque la carte tirée (toujours au hasard) en possède une ?

On pourra introduire les deux variables aléatoires suivantes : X représente la face visible de la carte choisie et Y sa face non visible, et commencer par donner leur loi conjointe.