X2016 – MAP 311
PC 1 – mardi 18 avril 2017 – Espaces probabilisés

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

Corrigé des exercices non traités sur `http://www.normalesup.org/~kortchem/MAP311` *un peu après la PC.*

1 Manipulations des concepts de base

Exercice 1. (0 **ou** 1)

(1) Soient A et B deux événements tels que $A \subset B$. On suppose que $\mathbb{P}(A) = 1$; que dire de $\mathbb{P}(B)$? Et si $\mathbb{P}(B) = 0$, que dire de $\mathbb{P}(A)$?

Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(2) On suppose que $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ et que $\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

(3) On suppose que $\mathbb{P}(A_i) = 1$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ et que $\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.

Exercice 2. **(Indépendances)** Alix dispose de quatre livres, un livre de mathématiques, un livre de biologie, un livre de chimie, et un livre mathématiques-biologie-chimie. Alix choisit au hasard, avec la probabilité uniforme, un livre parmi les quatre. Notons M, B et C les événements « le livre choisi traite notamment de mathématiques » (respectivement biologie, chimie). Les événements M, B et C sont-ils indépendants ?

Exercice 3. **(Probabilités conditionnelles)** Camille cherche un bicorne dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant que Camille a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

Exercice 4. **(Cylindres)** Sasha modélise des lancers d'une pièce comme suit. On pose $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Un élément de Ω est donc une suite de 0 et de 1. Pour $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$ on interprète ω_k comme le résultat du k-ième lancer (1 pour pile, 0 pour face). Pour tout $k \geq 1$ et $u_1, \ldots, u_k \in \{0,1\}$ on définit l'ensemble

$$C_{u_1,u_2,\ldots,u_k} = \{(\omega_n)_{n\geq 1} : \omega_1 = u_1, \ldots, \omega_k = u_k\}. \quad (1)$$

(1) Exprimer (par des unions, intersections et complémentaires) les événements suivants en fonction d'ensembles de type (1) :

(a) B_n : « on obtient pile pour la première fois au n-ième lancer »

(b) A : « le résultat du second lancer est pile »

(c) C : « on n'obtient jamais pile »

(d) D_n : « on obtient pile au moins deux fois au cours des n premiers lancers »

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

On admet l'existence d'une plus petite tribu $\mathcal{A}$ contenant tous les ensembles de type (1) et l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que

$$\mathbb{P}\left(C_{u_1,u_2,\dots,u_k}\right) = \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

(2) Calculer les probabilités des événements A, B_n, C, D_n précédents.

Remarque : On peut prouver que Ω n'est pas dénombrable, et qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que (2) soit vérifiée pour tous les ensembles de type (1).

2 Lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 5. **(Limite supérieure d'ensembles)** Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On pose

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{p\geq 1}\left(\bigcup_{n\geq p} A_n\right).$$

(1) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

(2) Si $A = \mathbb{R}$, donner $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les trois cas suivants :

(a) $A_n = [-1/n, 3 + 1/n]$

(b) $A_n = [-2-(-1)^n, 2+(-1)^n[$

(c) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n,

(3) Comparer $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$ et $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$ avec $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} B_n$.

(4) Que représente l'événement $\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{p\geq 1}\left(\bigcap_{n\geq p} A_n\right)$?

Rappel des lemmes de Borel-Cantelli.

∗ **Premier lemme de Borel-Cantelli.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. On suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. En d'autres termes, de manière équivalente :

– presque sûrement, A_n n'est réalisé qu'un nombre fini de fois ;
– presque sûrement, A_n n'est pas réalisé à partir d'un certain rang ;
– avec probabilité 0, A_n est réalisé une infinité de fois.

$*$ **Deuxième lemme de Borel-Cantelli.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements **indépendants**. On suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. En d'autres termes, de manière équivalente :

- presque sûrement, A_n est réalisé une infinité de fois.
- avec probabilité 0, A_n n'est pas réalisé à partir d'un certain rang.

Exercice 6. **(Marche aléatoire vue de l'origine)** Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1 - p$ avec $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$. On considère la marche aléatoire $Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ (avec $Z_0 = 0$). On note $A_n = \{Z_n = 0\}$.

(1) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

(2) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

(3) Lorsque $p = 1/2$, on peut montrer en utilisant la formule de Stirling que

$$\mathbb{P}(Z_{2n} = 0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Peut-on en déduire directement que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$?

3 Exercice à chercher pour le lundi 24 avril

Exercice 7. **(Un contre-exemple ?)** Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $1/2$. Pour $n \geq 1$, on considère l'évènement $A_n = \{X \geq \ln(n)/\ln(2)\}$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Commenter.

4 Plus appliqué

Exercice 8. (**Un petit calcul**) Combien de fois faut-il, en moyenne, lancer une pièce en l'air pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face ?

Exercice 9. (**Temps d'attente**) Anne retourne une à une les cartes d'un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table, jusqu'à trouver un as. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Exercice 10. **(Piles consécutifs)** Andrea lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Pour $n \geq 1$, on note L_n la plus longue séquence de « piles » consécutifs dans les n premiers lancers. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de L_n quand $n \to \infty$. Par exemple :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
tirage	F	P	P	F	P	P	P	F	P	$\cdots$
L_n	0	1	2	2	2	2	3	3	3	$\cdots$

Pour modéliser ce problème, Andrea considère $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1/2$. Posons :

$$L_n := \max\{k \geq 1;\ \text{il existe } i \leq n-k \text{ tel que } X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\}.$$

(1) Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\mathbb{P}(L_n \geq j) \leq \frac{n-j+1}{2^j} \leq \frac{n}{2^j}$.

(2) Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\mathbb{P}(L_n \leq j) \leq \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^{\lfloor n/j \rfloor}$.

(3) Trouver une suite (a_n) de nombre réels positifs tels que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on a

$$\mathbb{P}\left(1 - \epsilon < \frac{L_n}{a_n} < 1 + \epsilon\right) \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 1.$$

(4) Montrer que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{a_n} > 1 - \epsilon, \text{ à partir d'un certain rang }\right) = 1$. Montrer que pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{a_n} < 1 + \epsilon, \text{ à partir d'un certain rang }\right) = 1$.

(5) En déduire que $\mathbb{P}\left(\frac{L_n}{a_n} \to 1 \text{ lorsque } n \to \infty\right) = 1$. Autrement dit, presque sûrement, $\frac{L_n}{a_n}$ converge vers 1.

5 Pour aller plus loin

Exercice 11. **(Approximation diophantienne et Borel-Cantelli)** On admet l'existence d'une tribu $\mathcal{A}$ sur $[0,1]$ contenant tous les intervalles inclus dans $[0,1]$ (c'est la tribu borélienne) et d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $([0,1], \mathcal{A})$ telle que $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$ pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$ (c'est la mesure de Lebesgue).

(1) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left\{x \in [0,1] : \exists \text{ un nombre } \textbf{infini} \text{ de rationnels } p/q \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \text{ tq } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right\}\right) = 0.$$

Ainsi, « presque tout » x est « mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\epsilon$ ».

Indication. Pour tout $q \geq 1$, on pourra considérer

$$A_q := [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right].$$

(2) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left\{x \in [0,1] : \exists \text{ un nombre } \textbf{infini} \text{ de rationnels } p/q \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \text{ tq } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}\right\}\right) = 1.$$

Ainsi, « presque tout » x est « bien approchable par des rationnels à l'ordre 2 ».