

X₂₀₁₅ – MAP 311
PC 3 – Lundi 9 mai 2016 – Lois et espérances

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@cmap.polytechnique.fr

1 Méthode de la fonction muette (pour des v.a. réelles)

Exercice 1. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY .

2 Vecteurs de variables aléatoires réelles

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^2 dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbb{1}_{-1 \leq x, y \leq 1}.$$

- (1) Déterminer la loi de X .
- (2) Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.
- (3) Calculer $\mathbb{E}[XY]$.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^2 dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi}e^{-x(1+y^2)}\mathbb{1}_{x, y \geq 0}.$$

- (1) Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
- (2) Déterminer les lois de X et de Y .
- (3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

- (1) Soit $a > 0$. Calculer $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X \leq a}]$.
- (2) Quelle est la loi du couple (X, Y) ? Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

Pour des questions, demande d'explications etc., n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

3 Propriétés générales de l'espérance

Exercice 6. (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{1}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$.

(2) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Exercice 7. On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ (on rappelle qu'une permutation de \mathcal{S}_n est une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$). Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on dit que $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ est un point fixe de σ si $\sigma(i) = i$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{S}_n et de loi uniforme. On note $N(X)$ le nombre de points fixes de X .

En remarquant que

$$N(X) = \mathbb{1}_{1 \text{ est un point fixe de } X} + \mathbb{1}_{2 \text{ est un point fixe de } X} + \dots + \mathbb{1}_{n \text{ est un point fixe de } X},$$

calculer la valeur de $\mathbb{E}[N(X)]$.

Exercice 8. Dans cet exercice, on étudie un modèle simple de propagation d'une population, qu'on modélise comme suit.

- Chaque site de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est occupé soit par un (seul) individu, soit est vide.
- À l'instant $t = 0$, un individu occupe le site 0 et tous les autres sites sont vides.
- Si un individu est à côté d'un site vide, au bout d'un temps aléatoire, indépendant de tout le reste, distribué selon une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, il donne naissance à un individu qui va occuper ce site vide.

Soit T_n le premier temps où un individu occupe le site n . On fixe $a > 1/2$.

(1) Justifier qu'on peut écrire $T_n = E_1 + \dots + E_n$, où les variables aléatoires E_1, \dots, E_n sont des variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre 1.

(2) Montrer que

$$\mathbb{P}(T_n \geq n + n^a) \leq e^{-\sqrt{n} - n^{a-1/2}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{n}} \right)^n.$$

(3) Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang on a $T_n < n + n^a$.

4 Exercice à chercher pour la prochaine fois

Exercice 9. Soit N une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite. Déterminer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

5 Plus appliqué (hors PC)

Exercice 10. On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

- (1) Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?
- (2) Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ?

Exercice 11. On considère un bâton sur lequel on trace au hasard deux marques. On découpe le bâton suivant les deux marques. Quelle est la probabilité pour que l'on puisse faire un triangle avec les trois morceaux ainsi obtenus ?

6 Pour aller plus loin (hors PC)

Exercice 12. Soient X , Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

- (1) On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fautive.
- (2) On suppose que X et Y ont la même loi.
 - (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
 - (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 13. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f_X et f_Y . Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que $\mathbb{E}[F(X, Y)] = \mathbb{E}[G(Y)]$ où G est la fonction définie par $G(y) = \mathbb{E}[F(X, y)]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose qu'elles sont à densité.

- (1) Montrer que $\mathbb{P}(\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq j \text{ et } X_i = X_j) = 0$.
- (2) Montrer qu'il existe une permutation aléatoire σ telle que

$$\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(n)}) = 1$$

et que la loi de σ est uniforme sur l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Exercice 15. (Sommes d'Erdős : exercice à 500 dollars). Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f(n)$ le plus grand entier $k \geq 1$ tel qu'il existe des entiers distincts $x_1, \dots, x_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers (chacun étant utilisé au plus une seule fois) soient toutes différentes (on considère que x_i tout seul est une somme).

Par exemple, $f(4) \geq 3$, car en choisissant $1, 2, 4$, les sommes qu'on peut former sont $1, 2, 4, 1 + 2, 1 + 4, 2 + 4, 1 + 2 + 4$ qui sont toutes différentes. Par ailleurs, il est clair que $f(4) \leq 4$ et que $f(4) = 4$ n'est pas possible. En effet, si $f(4) = 4$, on doit choisir les entiers $1, 2, 3, 4$ et les deux sommes $1 + 2 = 3$ sont les mêmes. Ainsi, $f(4) = 3$.

Erdős a conjecturé qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, \quad f(n) \leq \ln_2(n) + C \quad (\text{où } \ln_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}),$$

et a offert 500 dollars à la première preuve correcte. Cette conjecture n'a pas encore été prouvée (ou réfutée).

Le but de cet exercice est de démontrer que

$$f(n) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2} \ln_2(\ln_2(n)) + C$$

en utilisant des outils probabilistes.

(1) Montrer que $f(n) \geq 1 + \lfloor \ln_2(n) \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).

On fixe maintenant $n \geq 2$ et on considère $x_1, \dots, x_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que les sommes qu'on puisse former en utilisant ces entiers soient toutes différentes. On va montrer l'existence de C (indépendant de n) tel que $k \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2} \ln_2(\ln_2(n)) + C$. Pour cela, on considère des variables aléatoires B_1, \dots, B_k indépendantes de même loi Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$X = B_1 x_1 + \dots + B_k x_k.$$

(2) Soit $\lambda > 1$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

(3) Montrer que pour tout entier x on a soit $\mathbb{P}(X = x) = o$, soit $\mathbb{P}(X = x) = 2^{-k}$. En remarquant qu'il y a au plus $\lambda n \sqrt{k} + 1$ entiers x tels que $|x - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2$, en déduire que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n \sqrt{k}/2) \leq 2^{-k} (\lambda n \sqrt{k} + 1).$$

(4) Conclure en prenant $\lambda = \sqrt{3}$.