Exercices posés aux Oraux des concours.

Partie I. Géométrie.

1) *(Oral Mines).*
Soit un triangle ABC et f l'application qui à tout point M intérieur au triangle (bords compris) associe la somme des distances de M aux trois côtés du triangle. Que dire de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M où f atteint son maximum ?

Solution : Notons $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ des vecteurs de norme 1 orthogonaux aux côtés (AB), (BC) et (CA), et dirigés vers l'intérieur du triangle (si on les place sur leur côté respectif).
Ainsi, on a $f(M) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{w}$. On en déduit que $f(M) = f(O) + \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{K}$, où $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.
Si $\overrightarrow{K} \neq \overrightarrow{0}$, on est ainsi ramené à déterminer le point dont la distance (orientée par $\overrightarrow{K}$) à la droite $O + \overrightarrow{K}^{\perp}$ est maximale.
Dans le cas où $\overrightarrow{K}$ est colinéaire à l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$, $\mathcal{E}$ est un côté du triangle.
Remarque : Ce cas correspond aux triangles isocèles, car dans ce cas, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ est colinéaire à $\overrightarrow{w}$. Autrement dit, la bissectrice de (AB, AC) est aussi la hauteurn donc le triangle est isocèle en A.
Si $\overrightarrow{K}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, alors le maximum est atteint en un unique point, qui est un des sommets du triangle.
Si $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{0}$, la fonction f est constante, donc $\mathcal{E}$ est l'intérieur du triangle. Ce cas correspond aux triangles équilatéraux.

2) *(Oral X).* Soient O un point fixe et C un cercle du plan.
a) A toute droite D passant par O coupant C, on associe les points d'intersection A et B de C et D.
Montrer que le produit $OA.OB$ est constant.
b) On suppose que O appartient à C, et on considère la tangente T à C en O' diamétralement opposé à O.
A toute droite D passant par O recoupant C, on associe le point d'intersection $A \neq O$ de C et D, et le point d'intersection B de D et T. Montrer que le produit $OA.OB$ est constant.

3) *(Oral X).* a) Soient A, B, C trois points non alignés du plan.
Montrer qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$.
En déduire que les hauteurs sont concourantes en un point H aligné avec le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O.
b) a) Soient A, B, C, D trois points non coplanaires de l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le tétraèdre $ABCD$ pour qu'il existe un point M tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}$.
c) Montrer que si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = 0$, alors $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.

4) *(Oral X).* Soient A, B, C trois points distincts d'un cercle Γ.
Les tangentes à Γ en A et B se coupent en C'. On définit de même A' et B'.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

5) *(Oral X).* a) Soit ABC un triangle et A', B', C' des points quelconques respectivement sur (BC), (AC) et (AB).
Montrer qu'il existe un unique point D tel que $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC'}$.
b) Soient quatre droites Δ_i, avec $1 \leq i \leq 4$ en position générale.
On note $A_{i,j}$ l'intersection de Δ_i et Δ_j, avec $1 \leq i < j \leq 4$. Soit A'_i un point de Δ_i.
On définit D_4 à partir de A_{12}, A_{13}, A_{23}, A'_3, A'_2, A'_1 comme D est défini au a) à partir de A, B, C, A', B', C'.
On définit de même D_2, D_3, D_1. Montrer que les quatre points D_i sont alignés.

6) *(Oral Mines).* Construire les cercles passant par un point donné et tangent à deux droites perpendiculaires données.

7) *(extrait Oral X).* Soient A, B, C trois points du plan d'affixes complexes a, b, c.
Exprimer l'aire du triangle en fonction de a, b, c.

Partie II. Analyse.

1) *(extrait Oral X).* Soient $a_1, ..., a_n$ des réels positifs.
a) Montrer que $1 + (a_1 + ... + a_n) \leq (1 + a_1)...(1 + a_n) \leq \exp(a_1 + ... + a_n)$.
b) Montrer que les inégalités précédentes restent vraies dans le cas où $a_i > -1$ pour tout $i \in \{1, 2, ...n\}$.

2) a) Soit f une application d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ dérivable, et telle que f' est croissante (on dit que f est convexe).
Soient $x_1, ..., x_n \in I$, avec $n \geq 1$. Montrer que $f(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}) \leq \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}$.
Indication : On pourra poser $y = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$, et noter que $f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)dt$.

b) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : Pour tous réels $x_1, ..., x_n > 0$, on a $(x_1 x_2 ... x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
c) (*Oral X*). Soient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des réels strictement positifs.
Comparer $(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 ... b_n)^{1/n}$ et $[(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)]^{1/n}$

3) (*Inspiré d'un Ecrit Mines*).
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme des $\frac{1}{k}$, pour $1 \leq k \leq n$.
En comparant $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et avec $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$, montrer que $\ln n \leq S \leq 1 + \ln n$.
b) On note $p_1, p_2, ..., p_r$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}\right) ... \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_r}}\right) \geq S$$

En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

4) (*extrait Oral ENS-Ulm*). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f(n)$ la somme des diviseurs de n.
a) Montrer que $f(n) \leq n + n \ln n$.
b) Montrer que $f(n)$ est impair ssi $n = 2^\alpha q^2$ où q est impair.

5) (*Oral X*).On considère $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \geq 1\}$.
Montrer que A est une réunion d'intervalles. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

6) (*Oral X*).
Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ un polynôme réel. On suppose que tous les a_k sont non nuls.
On note m le nombre de racines de P sur $\mathbb{R}^+$, et V le nombre de variations de signe dans la suite $(a_0, ..., a_n)$, c'est-à-dire que V est le nombre d'entiers $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $a_{k-1} a_k < 0$.
Montrer que $m \leq V$.

Partie III. Arithmétique.

1) (*Oraux Centrale*).
a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, n \in \mathbb{Z}$ pour que l'équation $ax \equiv b\ [n]$ admette des solutions.
b) On suppose que $2^n - 1$ est premier. Montrer que n est premier.
On suppose que $2^n + 1$ est premier. Montrer que n est une puissance de 2.

2) a) Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$.
En déduire le petit théorème de Fermat : Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a $a^p \equiv a\ [p]$.
b) (*extrait Oral ENS*). Soit n un entier.
Réciproquement, montrer que si pour tout $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, n divise $\binom{n}{k}$, alors n est premier.

3) (*Oral ENS*). a) En considérant $(n!) + 1$, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
b) Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers.
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers divisant au moins un entier $P(n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

4) (*Oral ENS-Ulm*). Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On considère l'ensemble

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}, \quad 4ab + c^2 = p\}$$

a) Montrer que S est non vide, fini et inclus dans $(\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{Z}^*$. On pose

$$S_1 = \{(a, b, c) \in S, \ a > b + c\} \text{ et } S_2 = \{(a, b, c) \in S, \ a < b + c\}$$

Montrer que S_1 et S_2 forment une partition disjointe de S. Expliciter une bijection de S_1 sur S_2.
b) On considère l'application $f : S_1 \to S_1 \quad (a, b, c) \longmapsto (a - b - c, b, -2b - c)$.
Montrer que f est bien définie et que $f \circ f$ est égale à l'identité, c'est-à-dire $(f \circ f)(a, b, c) = (a, b, c)$.
Montrer que f admet un unique point fixe, et en déduire que le cardinal de S est congru à 2 modulo 4.
c) Montrer que $S_3 = \{(a, b, c) \in S, \ a \neq b\}$ a un cardinal divisible par 4.
En déduire que p est somme de deux carrés.

5) a) On définit la partie fractionnaire d'un réel t par $\text{frac}(t) = t - E(t)$, où $E(t)$ est la partie entière de t.
Soit x un réel, et n un entier naturel non nul. En considérant les $(n+1)$ réels $\text{frac}(ix)$, avec $0 \leq i \leq n$ qui appartiennent à $[0, 1]$, montrer qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \{1, 2, ..., n\}$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq}$.

b) (*Oral X)* Soit un réel $r > 0$.En chaque point du plan à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, on trace le cercle de rayon r. Existe-t-il une droite passant par l'origine O qui ne rencontre que le cercle de centre O ?

6) (*Oral X*).
a) Soit $P = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $Q = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{Z}^n$.
Montrer que les n entiers $(b_k - a_k)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (c'est-à-dire n'admettent aucun diviseur premier commun) ssi il n'existe pas de point de $\mathbb{Z}^n$ sur le segment ouvert $]P, Q[$ de $\mathbb{R}^n$.
Si ces conditions sont réalisées, on dit que Q est visible de P.
b) On prend $n = 2$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe un carré de $\mathbb{Z}^2$ de côté r (c'est-à-dire une partie de $\mathbb{Z}^2$ du type $[a, a+r] \times [b, b+r]$, avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$), dont tous les points sont invisibles de l'origine.
Indication : On pourra utiliser le lemme chinois, qui affirme qu'étant donnés des entiers $a_1, ..., a_p$ et des entiers $m_1, ..., m_p$ deux à deux premiers entre eux, il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv a_k$ modulo m_k pour tout $k \in \{1, 2, ..., p\}$.

7) (*Oral ENS Ulm*).
a) Montrer que tout entier $n \geq 7$ s'écrit comme somme de deux entiers ≥ 2 et premiers entre eux.
b) Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.
Montrer que, pour tout $k > 2$, on a $p_{k+1} + p_{k+2} \leq p_1 p_2 ... p_k$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n le plus petit nombre premier ne divisant pas n. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{q_n}{n} = 0$.

Partie IV. Divers.

1) (*Oral X*).Soient n et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!} \in \mathbb{N}$.

2) (*Oral X*). On pose $H_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme
$$H_n(x) = \frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}$$
a) En considérant les coefficients du binôme, montrer que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.
En déduire que le produit de n entiers relatifs consécutifs est divisible par $n!$
b) Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $\leq n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) : $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$
(2) : On a $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$ $P(k) \in \mathbb{Z}$
(3) : Il existe des entiers $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + ... + \lambda_n H_n$.

3) (*Oral Centrale*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(2x-2)$. Montrer que f est constante.

4) (*Oral X*) Soit E un ensemble fini muni d'une loi associative. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x^2 = x$.

6) (*Oral ENS-Ulm*). Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ un tableau à n lignes (indexées par i) et n colonnes (indexées par j).
On suppose que $n \geq 2$ et que les a_{ij} sont des entiers naturels a_{ij}.
On suppose que, pour $(p,q) \in \{1, 2, ..., n\}^2$, si $a_{kl} = 0$, alors $\sum_{i=1}^n a_{ip} + \sum_{j=1}^n a_{qj} \geq n$.
Montrer que la somme des termes du tableau est $\geq \frac{1}{2}n^2$. Donner un exemple où il y a égalité.

7) On note $S(n)$ le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leq n^2$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{S(n)}{n^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

8) (*Oral X*). Trouver les couples (a,b) d'entiers strictement positifs tels que $a^b = b^a$ et $a \neq b$.