Développements d'Analyse et de Probabilités

Version préliminaire du 9 septembre 2009

Igor Kortchemski

Ce document regroupe les développements d'Analyse et de Probabilités que j'ai préparés pour l'agrégation externe de mathématiques en 2009. Ceux-ci sont classés par thème, puis par degré « d'originalité ». Les développements plutôt originaux sont complètement rédigés. Quant aux autres, je me contente de citer le résultat et de renvoyer aux références, mais cela ne signifie pas nécessairement qu'ils sont plus faciles. Chaque développement est auto-suffisant, en ce sens qu'il n'admet pas de résultat intermédiaire délicat et chacun est suivi d'un petit commentaire illustrant son *intérêt*.

Par ailleurs, j'espère qu'après avoir parcouru ce document le lecteur sera persuadé qu'on peut faire de belles mathématiques au niveau de l'agrégation.

Table des matières

Première partie
Probabilités

Nota Bene. Dans ce texte, lorsque nous écrivons « X est une variable aléatoire réelle », nous signifions qu'un espace probabilisé[1] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est fixé et que X est une application définie sur Ω à valeurs réelles, mesurable lorsque Ω est muni de la tribu $\mathcal{F}$ et $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, dans un soucis de simplification usuel en théorie de probabilités, au lieu d'écrire $X(\omega)$ avec $\omega \in \Omega$, nous omettrons la dépendance par rapport à l'aléa ω pour simplement écrire X. Par exemple, au lieu d'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega; \quad X(\omega)^2 \leq 1\}\right),$$

nous écrirons :

$$\mathbb{P}\left(X^2 \leq 1\right).$$

J'espère finalement que le lecteur ne sera pas trop offusqué lorsque la mesurablité de certaines applications ne sera pas justifiée, du moins lorsque celle-ci est quasiment immédiate.

[1] C'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

1 Développements un peu originaux

1.1 Théorème de continuité de Kolmogorov

Ce développement donne une condition suffisante pour qu'un processus à temps continu admette une modification continue.

Théorème 1.1 (Théorème de continuité de Kolmogorov). *Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de variable aléatoires réelles telle qu'il existe des constantes $c, \gamma, \epsilon > 0$ telles que :*

$$\forall 0 \leq s \leq 1, \qquad \mathbb{E}\left[|X_s - X_t|^\gamma\right] \leq c|s-t|^{1+\epsilon}.$$

Alors il existe une famille de variable aléatoires réelles $(\widetilde{X}_t)_{t\in[0,1]}$ telle que que :

1. *Pour tout $t \in [0,1]$, presque sûrement, $X_t = \widetilde{X}_t$.*
2. *Pour tout $0 < \alpha < \epsilon/\gamma$:*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\neq t} \frac{\widetilde{X}_s - \widetilde{X}_t}{|s-t|^\alpha}\right)^\gamma\right] < +\infty.$$

Preuve. À venir. ■

Références. Ceci est bien fait dans « Continuous martingales and brownian motion » (par Revuz-Yor), au début du chapitre consacré au mouvement brownien.

Remarques. À venir.

1.2 Construction du mouvement brownien

1.3 Étude de marches aléatoires

1.4 Loi du spectre d'une matrice symétrique aléatoire

t[2]

1.5 Étude asymptotique du nombre de records d'une permutation

1.6 Nombre moyen de cycles d'une permutation et TCL

t [3]

[2] D'après une discussion entre Nicolas Tholozan et moi

[3] Inspiré par un développement de Nicolas Tholozan proposé à la préparation d'Ulm

1.7 Lemme de Cerf

1.8 Théorème de Bochner

2 Développements moins originaux

2.1 Séries de Taylor aléatoires

3 Développements plus classiques

3.1 Loi faible des grands nombres

3.2 Loi forte des grands nombres

Deuxième partie
Topologie et analyse fonctionnelle

4 Développements un peu originaux

4.1 Résolution de $\triangle u = 0$ avec condition L^p au bord

4.2 Nieaux d'énérgies de l'oscillateur harmonique

5 Développements moins originaux

5.1 Théorème de Riemann

6 Développements plus classiques

6.1 Compacité séquentielle faible et opérateurs compacts

6.2 Algèbre de Wiener

6.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Troisième partie
Calcul différentiel

7 Développements un peu originaux

7.1 Théorème de stabilité de Liapounov

7.2 Développement asymptotique de la période d'un pendule

8 Développements moins originaux

8.1 Théorème d'Hadamard

t[4]

9 Développements plus classiques

9.1 Théorème de Von Neumann

9.2 Lemme de Morse

[4]Proposé à la préparation d'Ulm par Sylvain Arguillère.

Quatrième partie
Suites et séries numériques

Cinquième partie
Fonctions numériques

13 Développements un peu originaux

13.1 Inégalité isopérimétrique

14 Développements plus classiques

14.1 Automorphismes de la sphère de Riemann

14.2 Théorème de Sarkovski

14.3 Prolongement de la fonction Gamma au plan complexe