NOM: KORTCHEMSKI Prénom: Igor

Rouge ← Entourez l'épreuve → Bleu Entourez le jury → A B C D E F

Sujet choisi: 235 Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications

Autre sujet: 216 Étude métrique des courbes. Exemples.

235: Suites et séries de fonctions intégrables, Exemples et applications

Ici, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque, et on notera $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

I Interversions limite - intégrale

1) Quand a-t-on $\lim_{n\infty} \int f_n(\theta)d\theta = \int \lim f_n(\theta)\, d\theta$?

Thm 1 [Convergence monotone]. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions intégrables. Alors $\int (\lim f_n) d\mu = \lim \int f_n d\mu$

Cex 2 Si $(f_n)_n$ décroît, c'est faux (prendre $f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty]}$)

Ex 3 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} = 1/(1-\alpha)$ si $\alpha < 1$, $+\infty$ sinon

Thm 4 [Lemme de Fatou] Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables positives. Alors $0 \leq \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf (\int f_n d\mu)$.

Appl 5 (m̂ hyp). Si $\sup_n \int |f_n| d\mu < +\infty$ et $f_n \xrightarrow{pp} f$, alors $f \in L^1$

- Si $f_n \xrightarrow{pp} +\infty$, alors $\lim_n \int f_n d\mu \to +\infty$

Ex 6 Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est croissante, dérivable pp, $\int_0^1 f'(x)dx \leq f(1) - f(0)$.

Thm 7 [Convergence dominée] Soit $(f_n) \in (L^1)^{\mathbb{N}}$ tq

1) (f_n) converge pp vers f
2) $\exists g \in L^1$ tq $\forall x \in \Omega$, pp $\forall n$ $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors $f \in L^1$ et $\lim_{n\infty} \int f_n\, d\mu = \int f d\mu$

Ex 8 Soit $f_n(x) = \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$, $x \in [0,1]$.

Alors $\int f_n dx \to 0$, mais f_n ne converge pas uniformément vers 0.

Rq 9 Si $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x+n)$, alors $\int f_n(x)dx \to 0$ mais f_n n'est pas dominée par une fonction intégrable

Thm 10 Soit E un espace de Banach et $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément (CVU) vers f. Alors f est continue et $\int_a^b f_n(t)dt = \lim_{n\infty} \int_a^b f_n(t)dt$

2) Régularité sous le signe intégral

Ici, E est un espace métrique, $f : E \times \Omega \to \mathbb{C}$ et $F(t) = \int f(t,x)\, \mu(dx)$

Thm 11 On suppose : 1) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ mesurable
2) pp $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$.
3) $\exists g \in L^1$ tq $(|f(t,x)| \leq g(x), \forall t \in E)$, pp x.

Alors F est continue en t_0

Appl 12 Si μ est finie, $f(t) = \int e^{itx} \mu(dx)$ est continue de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Thm 13 On suppose ici $E = I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que

1) $\forall t \in X$, $x \mapsto f(t,x)$ est dans L^1
2) pp $x \in \Omega \setminus N$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I
3) $\forall K$ compact de I, $\exists g \in L^1$ tq $\forall x \notin N$, $\forall t \in K$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$.

Alors $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est dans $L^1(X)$ et F est dérivable sur I, et $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, \mu(dx)$.

Ex 14 pour $x > 0$ $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ définit une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Thm 15 Soit ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tq

1) $\forall z \in \omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est dans L^1
2) $\exists N \subset \Omega$, $\mu(N) = 0$ tq $\forall x \notin N$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans ω
3) $\forall K$ compact $\subset \omega$, $\exists g \in L^1$ tq $\forall z \in K, \forall x \notin N$, $|f(z,x)| \leq g(x)$.

Alors $F(z) = \int f(z,x)\, \mu(dx)$ est holomorphe et $F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x) \mu(dx)$

Ex 16 $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe dans $\{z ; \operatorname{Re} z > 0\}$

Ex 17 Si $f \in L^1([0,2\pi])$, $\mathcal{P}[f](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt$ définit une fonction holomorphe sur le disque ouvert

NOM: KORTCHEMSKI Prénom: Igor

Rouge ← Entourez l'épreuve → Bleu Entourez le jury → A B C D E F

Sujet choisi: 235

Autre sujet: 216

Ex18 Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est tq $\exists C,\delta>0$ tq $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\le Ce^{-\delta|x|}$, alors $z\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt}f(t)dt$ définit une fonction holomorphe sur $\{z;\ \operatorname{Im} z<\delta\}$

II) Les espaces fonctionnels L^p ($1\le p\le\infty$)

1) L'espace de Banach L^p

(On note $\|f\|_p=\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{1/p}$)

Lemme 19 Pour $u,v\geq 0$, $\lambda\in[0,1]$, $u^\lambda v^{1-\lambda}\le\lambda u+(1-\lambda)v$

Prop 20 [Hölder] Soient $p,q\geq 1$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$ pour $f\in L^p$, $g\in L^q$

Thm 21 • Pour $p\in[1,+\infty]$, $(L^p,\|\cdot\|_p)$ est complet ($\|\cdot\|_p$ est bien une norme)

• Si $(f_n)\in(L^p)^{\mathbb{N}}$ est tq $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|_p}f\in L^p$, alors $\exists$ extractrice φ et $g\in L^p$ tq pp, $|f_{\varphi(n)}|\le g$ et $f_{\varphi(n)}\xrightarrow{pp}f$

Cor 22 L^2 muni de $\langle f|g\rangle=\int f\bar{g}\,d\mu$ est un espace de Hilbert

Prop 23 Les fonctions étagées sont denses dans L^p si $p<+\infty$

Dans la suite, pour $p\geq1$, on note $p'\geq1$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=+\infty$

Thm 24 [Difficile] • Pour $1<p<+\infty$, $(L^p)'$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}$ via:

$$\phi: L^{p'}\to(L^p)'$$
$$g\mapsto f\mapsto\int fg\,d\mu$$

• pour $p=1$, le résultat subsiste si μ est σ-finie

cex 25 Si $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\{A\subset\Omega;\ A$ ou ^cA est dénombrable$\}$, μ mesure de comptage, alors $L^1\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\sum_{0\le x\le\frac12}f(x)$ ne s'écrit pas comme $\int fg\,d\mu$ avec $g\in L^\infty$

2) Séparabilité dans les espaces L^p

Ici, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu=d\lambda$.

Thm 26 $C_c(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{K}$ continues$\}$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p<+\infty$

Cor 27 $L^p(\Omega)$ est séparable ssi $p<+\infty$

Thm 28 Pour $p<+\infty$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans L^p.

Appl 29 Si $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\int_{\mathbb{R}^n}e^{itx}f(x)dx\xrightarrow[t\infty]{}0$

Appl / DVP 30 Soit μ une mesure de probabilité de $\mathbb{Z}^n$. On considère des v.a. iid $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de loi μ. On note $\varphi(\theta)=\mathbb{E}[e^{i\theta\cdot X_1}]$ et on suppose $\varphi(\theta_1,\dots,\theta_N)=0\iff 2\pi|\theta_i\ \forall i$

On note $P_n(x)=\mathbb{P}[X_1+\dots+X_n=x]$ et $G(x)=\sum_{n\geq0}P_n(x)$

Alors $\lim_{x\to+\infty}G(x)+G(-x)$ existe, lorsqu'on suppose que $\forall x\in\mathbb{Z}^n$, $G(x)<+\infty$

3) Convergence faible-*

Thm 31 [Arzela-Ascoli] Soit (X,d) un espace métrique séparable et $\mathcal{F}\subset\mathbb{C}^X$ tq

1) $\forall x\in X$, $\sup_{f\in\mathcal{F}}|f(x)|<+\infty$

2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tq $(f\in\mathcal{F},\ d(x,y)<r)\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Alors toute suite $(f_n)_n\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite uniformément convergente sur les compacts

Appl 32 [Banach Alaoglu] Soit E un evn séparable et $(\Lambda_n)_n$ des formes linéaires tq $\sup_n|||\Lambda_n|||\overset{=M}{<}+\infty$. Alors $\exists$ extractrice φ et une forme linéaire continue Λ tq $\forall x\in X$, $\Lambda x=\lim_{n\infty}\Lambda_{\varphi(n)}(x)$. De plus, $|||\Lambda|||<M$.

DVP Appl 33 On note $D\overset{D=}{(0,1)}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$ et $T=\partial D$. On dit que $f:D\to\mathbb{R}$ est harmonique si elle est C^2 et si $\Delta f=0$.

On note $P_r(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in t}$, de sorte que si $z=re^{i\theta}$, alors $P_r(\theta-t)=\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$

Pour $f\in L^1(T)$, on note $P[f](z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})dt$ pour $z\in D$

Soit $u:D\to\mathbb{R}$ harmonique et $1<p\le\infty$ tq $\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{it})|^p dt=M<+\infty$. Alors $\exists f\in L^p(T)$ tq $u=P[f]$ sur D.

NOM: KORTCHEMSKI Prénom: Igor

Rouge ← Entourez l'épreuve → Bleu Entourez le jury → A B C D E F

Sujet choisi: 235

Autre sujet: 216

III) Séries de fonctions intégrables

1) Interversion série-intégrale

Thm 34 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables.

1) Si $\forall n, \varphi_n \geq 0$, alors $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n d\mu$

2) Si $\sum_{n\geq 1} \int |\varphi_n| d\mu < +\infty$, alors φ_n, $\sum_{n\geq 1} |\varphi_n|$ et $\sum_{n\geq 1} \varphi_n \in L^1$ et de plus $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n d\mu$

Appl 35 [Lemme de Borel-Cantelli] Soit $(A_n)_n$ des parties mesurables. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim} A_n) = 0$ où $\overline{\lim} A_n = \{\omega \in \Omega ; \text{il existe une infinité de } n \text{ tq } \omega \in A_n\}$

Thm 36 Si $\sum g_n$ est une série de fonctions d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b g_n(t)\right) dt$

Ex 37 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors pour $0 < r < R$, la série de fonctions de terme général (à r fixé) $f_p(\theta) = a_p r^p e^{ip\theta}$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.

2) Application à l'étude des fonctions analytiques

Thm 38 [Parseval] (mêmes not. que Ex 37). Pour $r \in]0, R[$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$

Appl 39 Une fonction analytique non constante sur un ouvert connexe n'admet pas de maximum local.

Appl 40 [Hurwitz] Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes injectives convergeant sur tout compact vers une fonction (holomorphe) f. Alors f est injective ou constante.

IV) Suites et séries de variables aléatoires

Ici, on prend $\mu = \mathbb{P}$, mesure de probabilité. On notera $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des v.a réelles ou complexes, ainsi que X et Y ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Théorèmes de Lévy

Déf 41 On note $\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta X}]$ la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X

Thm 42 On a : $(\forall \theta \in \mathbb{K}, \varphi_X(\theta) = \varphi_Y(\theta)) \Leftrightarrow$ (X et Y ont même loi)

Déf 43 On dit que (X_n) converge en loi vers X si $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

Thm 44 [Lévy].

1) Si $(X_n) \overset{loi}{\Rightarrow} X$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(\theta) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \varphi_X(\theta)$

2) Si φ_{X_n} converge ponctuellement vers une fonction φ continue en 0, il existe v.a X tq $X_n \overset{loi}{\Rightarrow} X$

2) Applications

Thm 45 [Construction du Mouvement Brownien] DVP Il existe des v.a $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tq

1) ps, $B_0 = 0$

2) $\forall t, s \geq 0$, $(B_{t+s} - B_s) \overset{loi}{=} N(0, \sigma^2)$

3) Pour $s, t \geq 0$, $0 \leq t_1, \dots, t_k \leq t$

$\sigma(B_{t+s} - B_s) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$

Thm 46 On munit $\mathfrak{S}_n$ de la loi uniforme et on note $Z_n(\sigma)$ le nombre de cycles apparaissant dans la décomposition en cycles disjoints de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Alors $\frac{Z_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} \underset{n\infty}{\overset{loi}{\Longrightarrow}} N(0,1)$

NB On note $N(m, \sigma^2)$ une variable aléatoire de loi $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx$