Exemple 13.5

Une tige en acier de construction a un rayon R de 9,5 mm et une longueur L de 81 cm. Une force dont le module est de 62 kN l'étire sur sa longueur. Quels sont la contrainte appliquée sur la tige ainsi que son allongement et sa déformation ?

SOLUTION : Le premier concept clé est basé sur la compréhension de l'expression « étire sur sa longueur » apparaissant dans la deuxième phrase du problème. On suppose que la tige est maintenue immobile, soit par une pince fixée à une extrémité, soit parce qu'une de ses extrémités est vissée. La force $\vec{F}$ est appliquée à l'autre extrémité, parallèlement à la longueur de la tige et perpendiculairement à la surface de l'extrémité. Par conséquent, il s'agit d'une situation semblable à celle de la figure 13.11 a).

Le deuxième concept clé est que l'on suppose que la force est appliquée uniformément sur la surface de l'extrémité, donc sur une aire $A = \pi R^2$. Ainsi, la contrainte sur la tige est déterminée par le côté gauche de l'équation 13.25 :

$$\text{contrainte} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6{,}2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9{,}5 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$
$$= 2{,}2 \times 10^8 \text{ N/m}^2. \qquad \text{(réponse)}$$

La limite d'élasticité de l'acier de construction est $2{,}5 \times 10^8$ N/m² ; la tige en est donc dangereusement près.

Le troisième concept clé utilisé ici est le suivant : l'allongement de la tige dépend de la contrainte, de la longueur initiale L et du type de matériau de la tige. Ce dernier détermine la valeur du module de Young, E (voir le tableau 13.1). Si on utilise la valeur correspondant à l'acier, l'équation 13.25 donne

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2{,}2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0{,}81 \text{ m})}{2{,}0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2}$$
$$= 8{,}9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0{,}89 \text{ mm}. \qquad \text{(réponse)}$$

Le dernier concept clé utilisé ici est le suivant : la déformation est le rapport entre l'allongement et la longueur initiale ; on a donc

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8{,}9 \times 10^{-4} \text{ m}}{0{,}81 \text{ m}}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-3} = 0{,}11\,\%. \qquad \text{(réponse)}$$

Exemple 13.6

Une table a trois pattes d'une longueur de 1,00 m et une quatrième patte plus longue de $d = 0{,}50$ mm, de sorte qu'elle branle légèrement. On installe, debout sur cette table, un lourd cylindre d'acier de masse $M = 290$ kg (la masse de la table est de beaucoup inférieure à M), de sorte que les quatre pattes sont comprimées et que la table ne branle plus. Les pattes sont des cylindres de bois dont l'aire de la section transversale est $A = 1{,}0$ cm². Le module de Young, E, du bois est $1{,}3 \times 10^{10}$ N/m². Supposez que le dessus de la table demeure horizontal et que les pattes ne se tordent pas. Quels sont alors les modules des forces qu'exerce le plancher sur les pattes ?

SOLUTION : On considère la table et le cylindre d'acier comme un système. La situation ressemble à celle de la figure 13.9, exception faite qu'il y a ici un cylindre d'acier sur la table. On utilise un premier concept clé : si le dessus de la table demeure horizontal, les pattes doivent être comprimées de la manière suivante : les trois pattes les plus courtes doivent être comprimées d'une même valeur (appelons-la ΔL_3) et, dans chaque cas, par une force ayant le même module F_3. La patte la plus longue doit être comprimée d'une valeur plus élevée, ΔL_4, donc par une force ayant un module plus grand, F_4. En d'autres mots, pour avoir un dessus de table horizontal, on doit avoir

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d, \qquad (13.28)$$

où

$$d = 0{,}50 \text{ mm}.$$

Le deuxième concept clé est le suivant : en se basant sur l'équation 13.25, on peut mettre en relation l'allongement d'une patte avec la force qui le produit par l'équation $\Delta L = FL/(AE)$, où L est la longueur initiale de la patte. On peut faire appel à cette relation pour remplacer ΔL_4 et ΔL_3 dans l'équation 13.28. Cependant, il faut noter qu'on peut utiliser une approximation de la longueur initiale, L, en considérant qu'elle est la même pour les quatre pattes. Les remplacements mènent à

$$\frac{F_4 L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} + d. \qquad (13.29)$$

On *ne peut* résoudre cette équation parce qu'elle contient deux inconnues, F_4 et F_3.

Pour obtenir une deuxième équation comprenant F_4 et F_3, on peut utiliser un axe des y vertical dont la direction positive est vers le haut, puis se servir de la condition d'équilibre de translation pour cet axe ($F_{\text{rés},y} = 0$) et ainsi écrire :

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0, \qquad (13.30)$$

où Mg correspond au module de la force gravitationnelle agissant sur le système. (*Trois* pattes subissent la force $\vec{F}_3$.) Pour résoudre F_3, par exemple, de façon simultanée dans les équations 13.29 et 13.30, il faut d'abord utiliser l'équation 13.30, pour déterminer que $F_4 = Mg - 3F_3$. Si on insère cette expression de F_4 dans l'équation 13.29 et si on effectue un peu d'algèbre, on obtient

$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L}$$
$$= \frac{(290 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)}{4} - \frac{(5{,}0 \times 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1{,}3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1{,}00 \text{ m})}$$
$$= 0{,}55 \text{ kN}. \qquad \text{(réponse)}$$

À l'aide de l'équation 13.30, on détermine que

$$F_4 = Mg - 3F_3$$
$$= (290 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) - 3(548 \text{ N})$$
$$= 1{,}2 \text{ kN}. \qquad \text{(réponse)}$$

Vous pouvez ainsi démontrer que, pour atteindre l'équilibre, les trois pattes courtes sont comprimées de 0,42 mm et la patte longue, est comprimée de 0,92 mm.

✔ VÉRIFIEZ VOS CONNAISSANCES 6 : La figure montre un bloc horizontal suspendu au plafond par deux câbles, A et B, identiques, exception faite de leurs longueurs initiales. Le centre de masse du bloc se trouve plus près du câble B que du câble A.
a) Si on mesure les moments de force par rapport au centre de masse du bloc, le module du moment de force produit par le câble A est-il supérieur, inférieur ou égal au module du moment de force produit par le câble B ? b) Quel câble exerce la plus grande force sur le bloc ? B c) Si les deux câbles sont maintenant de même longueur, lequel était initialement le plus court ? B