...ivité restreinte :

Éléments de Réflexion

Exemple 8.1

Votre vaisseau spatial passe près de la Terre à une vitesse relative de 0,999 0c. Après avoir voyagé 10,0 a (votre temps), vous vous arrêtez au poste d'observation LP13, virez, puis revenez vers la Terre à la même vitesse relative. Le voyage de retour dure encore 10,0 a (votre temps). Combien de temps le voyage aller-retour dure-t-il, selon le temps mesuré sur la Terre ? (Négligez tout effet relatif à l'accélération en jeu lors de l'immobilisation, du virage et du rétablissement de la vitesse de croisière.)

SOLUTION : On commence en n'analysant que le trajet à l'aller, et en tenant compte des concepts clés suivants.

1. Ce problème met en jeu des mesures prises à partir de deux référentiels (inertiels), l'un relié à la Terre, l'autre (le vôtre) relié à votre vaisseau.
2. À l'aller, le voyage comporte deux événements : le départ près de la Terre et l'arrivée à LP13.
3. Votre mesure de 10,0 a pour le trajet à l'aller est l'intervalle de temps propre Δt_0 entre ces deux événements, car ceux-ci se produisent au même endroit dans votre référentiel, à savoir dans votre vaisseau.
4. À partir du référentiel de la Terre, la mesure de l'intervalle de temps Δt pour le trajet à l'aller doit être supérieure à Δt_0, selon l'équation 8.9 ($\Delta t = \gamma\, \Delta t_0$) relative à la dilatation du temps.

   Si on utilise l'équation 8.8 pour remplacer γ dans l'équation 8.9, on constate que

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$
$$= \frac{10{,}0 \text{ a}}{\sqrt{1-(0{,}999\,0c/c)^2}} = (22{,}37)(10{,}0 \text{ a}) = 223{,}7 \text{ a}.$$

Lors du voyage de retour, on a la même situation et les mêmes données. Donc, le voyage aller-retour prend 20,0 a selon votre temps, mais

$$\Delta t_{\text{total}} = (2)(223{,}7 \text{ a}) = 447 \text{ a} \qquad \text{(réponse)}$$

selon le temps mesuré sur la Terre. Autrement dit, vous avez vieilli de 20,0 a pendant que la Terre vieillissait de 447 ans. Bien qu'on ne puisse voyager dans le passé (selon nos connaissances), on peut voyager dans l'avenir de la Terre, par exemple en utilisant le mouvement relatif à haute vitesse pour régler l'écoulement du temps.

Exemple 8.2

La particule élémentaire appelée *kaon positif* (K^+) a une durée de vie moyenne de 0,123 7 μs quand elle est immobile, c'est-à-dire quand la durée de vie est mesurée dans le référentiel propre du kaon. Si un kaon positif a une vitesse de 0,990c par rapport au référentiel du laboratoire quand il est produit, quelle distance peut-il parcourir dans le laboratoire durant sa durée de vie selon la *physique newtonienne* (approximation valable pour des vitesses très inférieures à c) et selon la relativité restreinte (qui est bonne à toutes les vitesses physiquement possibles) ?

SOLUTION : On commence avec les concepts clés suivants.

1. Ce problème met en jeu deux mesures effectuées dans deux référentiels (inertiels), l'un relié au kaon, l'autre relié au laboratoire.
2. Ce problème implique également deux événements : le départ du kaon (quand il est produit) et son arrivée (quand il se désintègre).
3. L'équation suivante relie la distance parcourue par le kaon entre ces deux événements avec sa vitesse v et la durée de son mouvement

$$v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{intervalle de temps}}. \qquad (8.11)$$

Avec ces concepts en tête, on détermine d'abord la distance parcourue d'après la physique newtonienne, puis en fonction de la relativité restreinte.

Mécanique newtonienne : En mécanique newtonienne, on se fonde sur ce concept clé : on devrait trouver la même distance et le même intervalle de temps (dans l'équation 8.11), qu'on les mesure dans le référentiel du kaon ou dans le référentiel du laboratoire. On n'a donc pas à tenir compte du référentiel où les mesures sont prises. Pour déterminer la distance parcourue par le kaon, d_{pn}, selon la physique newtonienne, il faut d'abord reformuler l'équation 8.11 ainsi :

$$d_{pn} = v\,\Delta t, \qquad (8.12)$$

où Δt est l'intervalle de temps qui sépare les deux événements dans n'importe quel référentiel. Si on remplace ensuite v par 0,990c et Δt par 0,123 7 μs dans l'équation 8.12, on obtient :

$$d_{pn} = (0{,}990c)\Delta t$$
$$= (0{,}990)(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})(0{,}123\,7 \times 10^{-6}\text{s})$$
$$= 36{,}7 \text{ m}. \qquad \text{(réponse)}$$

C'est la distance que le kaon parcourrait si la physique newtonienne s'appliquait à des vitesses proches de c.

Relativité restreinte : Lorsqu'on aborde le problème à l'aide de la relativité restreinte, on utilise le concept clé suivant : il faut bien s'assurer que la distance et l'intervalle de temps de l'équation 8.11 sont tous les deux mesurés dans le même référentiel, particulièrement quand la vitesse se rapproche de c, comme c'est le cas ici. Donc, pour déterminer la distance réellement parcourue, d_{rr}, par le kaon, telle qu'elle est *mesurée dans le référentiel du laboratoire* et selon la relativité restreinte, on reformule l'équation 8.11 ainsi :

$$d_{rr} = v\,\Delta t, \qquad (8.13)$$

où Δt est l'intervalle de temps qui sépare ces deux événements *mesurés dans le référentiel du laboratoire*.

Avant de pouvoir évaluer d_{rr} dans l'équation 8.13, il faut déterminer Δt en faisant appel au concept clé suivant : l'intervalle de 0,123 7 μs est un intervalle de temps propre parce que les deux événements se produisent au même endroit dans le référentiel du kaon, à savoir au kaon lui-même. Par conséquent, on représente l'intervalle de temps propre par Δt_0. On peut alors utiliser l'équation 8.9 ($\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$) relative à la dilatation du temps pour déterminer l'intervalle de temps Δt tel qu'il est mesuré dans le référentiel du laboratoire. Dans l'équation 8.9, si on remplace γ par l'expression de l'équation 8.8, on obtient :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{0{,}123\,7 \times 10^{-6}\text{ s}}{\sqrt{1-(0{,}990c/c)^2}} = 8{,}769 \times 10^{-7}\text{ s},$$

ce qui représente environ sept fois la durée de vie propre du kaon. C'est donc dire que le kaon existe environ sept fois plus longtemps dans le référentiel du laboratoire que dans son référentiel propre – sa durée de vie est dilatée. On peut maintenant évaluer l'équation 8.13 pour déterminer la distance parcourue, d_{rr}, dans le référentiel du laboratoire :

$$d_{rr} = v\,\Delta t = (0{,}990c)\,\Delta t$$

= 260 m

Cela représente environ sept fois d_{pn}. Des expériences comme celle qu'on a décrite ici, qui permet de vérifier la relativité restreinte, font partie de la routine dans les laboratoires de physique depuis des décennies. Quand des ingénieurs conçoivent des équipements scientifiques ou médicaux qui emploient des particules à haute vitesse, ils doivent tenir compte de la relativité.

Exemple 8.3

Dans la figure 8.8, Sophie (située au point A) et le vaisseau spatial de Samuel (d'une longueur propre $L_0 = 230$ m) passent l'un près de l'autre à une vitesse relative constante $\vec{v}$. Sophie mesure 3,57 μs pour l'intervalle de temps nécessaire au vaisseau pour la dépasser (du passage du point B au passage du point C). Quelle est la vitesse relative v entre Sophie et le vaisseau, exprimée en fonction de la vitesse de la lumière c ?

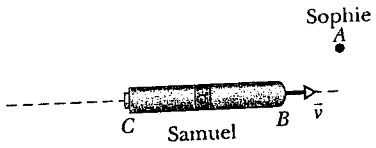

Figure 8.8 Exemple 8.3 Sophie, située au point A, mesure le temps qu'il faut au vaisseau pour la dépasser.

SOLUTION : On suppose ici que la vitesse v est proche de la vitesse de la lumière. On peut alors commencer avec les concepts clés suivants.

1. Ce problème met en jeu des mesures prises dans deux référentiels (inertiels), l'un lié à Sophie, l'autre lié à Samuel et son vaisseau spatial.
2. Ce problème met également en jeu deux événements : le premier est le passage du point B vis-à-vis Sophie ; le second, le passage du point C.
3. Pour chaque référentiel, l'autre référentiel passe à une vitesse v et parcourt une certaine distance dans l'intervalle de temps entre les deux événements :

$$v = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{intervalle de temps}}. \qquad (8.18)$$

Étant donné qu'on suppose que v se rapproche de la vitesse de la lumière, il faut s'assurer que la distance et l'intervalle de temps utilisés dans l'équation 8.18 sont mesurés dans le *même* référentiel.

On peut choisir le référentiel que l'on veut pour prendre ses mesures. Puisqu'on sait que l'intervalle de temps Δt mesuré dans le référentiel de Sophie entre les deux événements est 3,57 μs, on utilisera aussi la distance L entre ces deux événements, mesurée dans son référentiel. L'équation 8.18 devient alors

$$v = \frac{L}{\Delta t}. \qquad (8.19)$$

On ne connaît pas la valeur de L, mais le concept clé suivant donne la relation entre celle-ci et la valeur de L_0 fournie : la distance mesurée entre les deux événements dans le référentiel de Samuel est la longueur propre du vaisseau L_0. Donc, la distance L mesurée dans le référentiel de Sophie doit être inférieure à L_0, comme l'indique l'équation 8.14 ($L = L_0/\gamma$) de la contraction des longueurs. Si on remplace L par L_0/γ dans l'équation 8.19, puis si on remplace γ par l'équation 8.8, on obtient :

$$v = \frac{L_0/\gamma}{\Delta t} = \frac{L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{\Delta t}.$$

Si on isole v, on obtient :

$$\begin{aligned} v &= \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\,\Delta t)^2 + L_0^2}} \\ &= \frac{(230\text{ m})c}{\sqrt{(2{,}998\times10^8\text{ m/s})^2(3{,}57\times10^{-6}\text{ s})^2 + (230\text{ m})^2}} \\ &= 0{,}210c. \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Par conséquent, la vitesse relative entre Sophie et le vaisseau est égale à 21 % de la vitesse de la lumière. Notez que seul le mouvement relatif de Sophie et de Samuel importe ici ; le fait que l'un soit immobile par rapport à un vaisseau spatial, par exemple, n'est pas pertinent. Dans la figure 8.8, on considère que Sophie est immobile, mais on peut tout aussi bien considérer que c'est le vaisseau qui est immobile et que c'est Sophie qui passe à côté. Le résultat sera le même.

Exemple 8.6

a) Quelle est l'énergie totale E d'un électron de 2,53 MeV ?

SOLUTION : Le concept clé utilisé ici est le suivant : selon l'équation 8.46, l'énergie totale E est la somme de l'énergie au repos (ou équivalence masse-énergie) de l'électron mc^2 et de son énergie cinétique :

$$E = mc^2 + K. \qquad (8.58)$$

Dans l'énoncé du problème, l'adjectif « 2,53 MeV » signifie que l'électron possède une énergie cinétique de 2,53 MeV. Pour évaluer l'énergie au repos mc^2 de l'électron, on remplace sa masse m par sa valeur donnée dans l'annexe B, ce qui donne

$$\begin{aligned} mc^2 &= (9{,}109\times10^{-31}\text{ kg})(2{,}998\times10^8\text{ m/s})^2 \\ &= 8{,}187\times10^{-14}\text{ J}. \end{aligned}$$

Si on divise ensuite ce résultat par $1{,}602\times10^{-13}$ J/MeV, on obtient une énergie au repos de 0,511 MeV pour l'électron. (On peut confirmer cette valeur dans le tableau 8.3. On aurait pu aussi utiliser la masse de l'électron donnée à l'annexe B en MeV/c^2.) Cela indique que l'énergie au repos d'un électron est égale à 0,511 MeV. L'équation 8.58 donne alors

$$E = 0{,}511\text{ MeV} + 2{,}53\text{ MeV} = 3{,}04\text{ MeV}. \qquad \text{(réponse)}$$

b) Quel est le module de la quantité de mouvement p de l'électron, exprimé en MeV/c ?

SOLUTION : Ici, le concept clé est le suivant : on peut déterminer p à partir de l'énergie totale E et de l'énergie au repos mc^2 à l'aide de l'équation 8.54,

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Si on isole pc, on obtient :

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \\ &= \sqrt{(3{,}04\text{ MeV})^2 - (0{,}511\text{ MeV})^2} = 3{,}00\text{ MeV}. \end{aligned}$$

Finalement, si on divise les deux membres par c, on obtient :

$$p = 3{,}00\text{ MeV}/c. \qquad \text{(réponse)}$$

Exemple 8.4

Un vaisseau spatial terrien a été envoyé pour connaître l'état d'un poste avancé sur la planète P1407, dont la lune abrite un groupe de combattants reptuliens, souvent hostiles. Sur une trajectoire rectiligne qui passe d'abord près de la planète, puis près de la lune, le vaisseau détecte une émission de micro-ondes à haute énergie à la base lunaire des Reptuliens puis, 1,10 s plus tard, une explosion au poste avancé terrien, qui se trouve à $4{,}00 \times 10^8$ m de la base reptulienne, distance mesurée dans le référentiel du vaisseau. Les Reptuliens ont apparemment attaqué le poste avancé terrien, si bien qu'à l'intérieur du vaisseau, on se prépare pour un affrontement.

a) La vitesse du vaisseau par rapport à la planète et à sa lune est de $0{,}980c$. Quels sont la distance et l'intervalle de temps entre l'émission et l'explosion, mesurés dans le référentiel inertiel planète-lune (donc, selon la perspective des occupants du poste avancé) ?

SOLUTION : On commence avec les concepts clés suivants.

1. Ce problème met en jeu des mesures prises dans deux référentiels, le référentiel planète-lune et le référentiel du vaisseau.
2. Ce problème met en jeu deux événements : l'émission et l'explosion.
3. Il faut transformer en données appropriées au référentiel planète-lune les données relatives aux temps des deux événements et à la distance les séparant mesurées dans le référentiel du vaisseau.

Avant d'effectuer la transformation, il faut soigneusement choisir la notation. On commence en traçant un croquis de la situation, comme dans la figure 8.10. On y a établi que le référentiel du vaisseau S est immobile et que le référentiel planète-lune S' est en mouvement avec une vitesse vers la droite. (Ce choix est arbitraire ; on aurait pu considérer comme immobile le référentiel planète-lune. Il aurait alors fallu redessiner $\vec{v}$ dans la figure 8.10 en l'attachant au référentiel S et en indiquant un mouvement vers la gauche ; les signes devant v auraient alors été changés. Les résultats auraient toutefois été les mêmes.) On décrit l'explosion avec l'indice x et l'émission avec l'indice m. Les données fournies, toutes dans le référentiel S (du vaisseau), sont alors

$$\Delta x = x_x - x_m = +4{,}00 \times 10^8 \text{ m}$$

et

$$\Delta t = t_x - t_m = +1{,}10 \text{ s.}$$

Ici, Δx est une valeur positive parce que, dans la figure 8.10, la coordonnée x_x de l'explosion est supérieure à la coordonnée x_m de l'émission ; Δt est aussi une valeur positive parce que le temps t_x de l'explosion est supérieur (après) au temps t_m de l'émission.

On cherche $\Delta x'$ et $\Delta t'$, que l'on devra obtenir en transformant les données du référentiel S en données du référentiel planète-lune S'. Étant donné qu'on étudie une paire d'événements, on utilise les équations de transformation du tableau 8.2, à savoir les équations 1′ et 2′ :

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t) \qquad (8.27)$$

et

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\,\Delta x}{c^2}\right). \qquad (8.28)$$

Ici, $v = +0{,}980c$, et le facteur de Lorentz est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(+0{,}980c/c)^2}} = 5{,}025\,2.$$

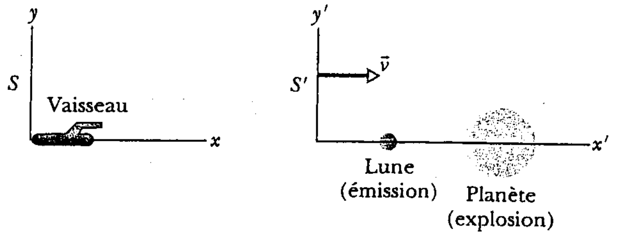

Figure 8.10 Exemple 8.4 Une planète et sa lune dans le référentiel S' se déplacent vers la droite à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un vaisseau se trouvant dans le référentiel S.

L'équation 8.27 devient alors

$$\begin{aligned}\Delta x' &= (5{,}025\,2)\\ &\quad \times [4{,}00 \times 10^8 \text{ m} - (+0{,}980)(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})(1{,}10 \text{ s})]\\ &= 3{,}86 \times 10^8 \text{ m}, \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

et l'équation 8.28 devient

$$\begin{aligned}\Delta t' &= (5{,}025\,2)\\ &\quad \times \left[(1{,}10 \text{ s}) - \frac{(+0{,}980)(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})(4{,}00 \times 10^8 \text{ m})}{(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})^2}\right]\\ &= -1{,}04 \text{ s.} \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

b) Que signifie le signe négatif dans la valeur de $\Delta t'$?

SOLUTION : L'important ici est d'être cohérent avec la notation que l'on a choisie en a). Rappelez-vous comment on a d'abord défini l'intervalle de temps entre l'émission et l'explosion : $\Delta t = t_x - t_m = +1{,}10$ s. Pour être cohérent avec cette notation, on doit définir $\Delta t'$ comme étant $t'_x - t'_m$; on constate donc que

$$\Delta t' = t'_x - t'_m = -1{,}04 \text{ s.}$$

Le signe négatif indique que $t'_m > t'_x$; c'est donc dire que, dans le référentiel planète-lune, l'émission s'est produite 1,04 s *après* l'explosion, et non pas 1,10 s *avant* l'explosion, comme on l'a perçu à partir du référentiel du vaisseau.

c) L'émission a-t-elle provoqué l'explosion, ou est-ce le contraire ?

SOLUTION : L'ordre des événements perçu dans le référentiel planète-lune est l'inverse de l'ordre perçu dans le référentiel du vaisseau. Ici, le concept clé est que, dans l'une ou l'autre de ces situations, s'il y a une relation de cause à effet entre les deux événements, l'information doit voyager d'un endroit à l'autre pour provoquer le second événement. On vérifie donc la vitesse à laquelle cette information doit voyager. Dans le référentiel du vaisseau, cette vitesse est

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4{,}00 \times 10^8 \text{ m}}{1{,}10 \text{ s}} = 3{,}64 \times 10^8 \text{ m/s},$$

vitesse impossible parce qu'elle dépasse c. Dans le référentiel planète-lune, la vitesse obtenue est $3{,}70 \times 10^8$ m/s, également impossible. Par conséquent, aucun des événements ne peut avoir provoqué l'autre ; autrement dit, il s'agit de deux événements *indépendants*. Donc, les occupants du vaisseau ne doivent pas s'en prendre aux Reptuliens.

Exemple 8.5

La figure 8.13 a) représente graphiquement l'intensité, en fonction de la longueur d'onde, d'une lumière provenant de gaz interstellaires se trouvant à des côtés opposés de la galaxie M87 (figure 8.13 b]). Une courbe atteint un pic à 499,8 nm, l'autre, à 501,6 nm. Le gaz orbite autour du cœur de la galaxie à un rayon r = 100 années-lumière; il se dirige apparemment vers la Terre d'un côté du cœur, et s'en éloigne du côté opposé.

a) Quelle courbe correspond au gaz se dirigeant vers la Terre? b) Quelle est la vitesse de ce gaz par rapport à la Terre (et par rapport au cœur de la galaxie)?

SOLUTION: Les **concepts clés** sont les suivants:

1. Si le gaz ne tournait pas autour du cœur de la galaxie, la lumière qu'il émet serait détectée à une certaine longueur d'onde.
2. En raison de l'effet Doppler, le mouvement du gaz modifie la longueur d'onde détectée, l'augmentant dans le cas du gaz qui s'éloigne de la Terre et la diminuant dans le cas du gaz qui s'en rapproche.

Donc, le pic de la courbe à 501,6 nm correspond au mouvement qui s'éloigne de la Terre; le pic à 499,8 nm, au mouvement qui s'en rapproche.

On peut supposer ici que l'augmentation et la diminution de la longueur d'onde provoquées par le mouvement du gaz sont d'égale grandeur. La longueur d'onde non décalée, que l'on considérera comme une longueur d'onde propre λ_0, doit alors être la moyenne des deux longueurs d'ondes décalées:

$$\lambda_0 = \frac{501{,}6 \text{ nm} + 499{,}8 \text{ nm}}{2} = 500{,}7 \text{ nm}.$$

Le déplacement Doppler $\Delta\lambda$ de la lumière provenant du gaz s'éloignant de la Terre est alors

$$\Delta\lambda = |\lambda - \lambda_0| = 501{,}6 \text{ nm} - 500{,}7 \text{ nm} = 0{,}90 \text{ nm}.$$

Si on insère cette valeur et λ = 501,6 nm dans l'équation 8.35, on constate que la vitesse du gaz est

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c = \frac{0{,}9 \text{ nm}}{501{,}6 \text{ nm}} 2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 5 \times 10^5 \text{ m/s}. \quad \text{(réponse)}$$

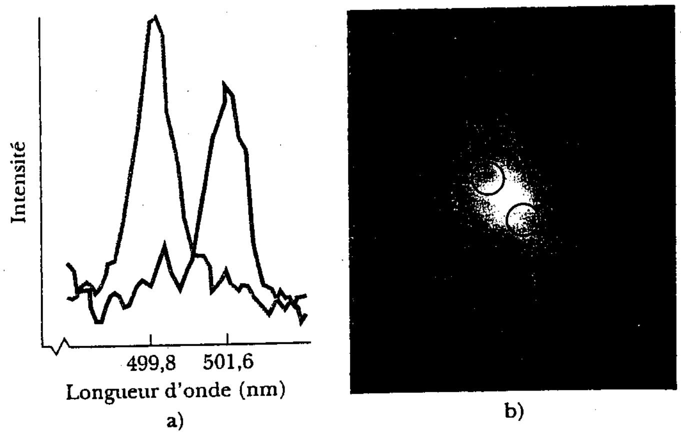

Figure 8.13 Exemple 8.5 a) Courbes de l'intensité, en fonction de la longueur d'onde, de la lumière émise par des gaz situés à des côtés opposés de la galaxie M87 et détectée sur Terre b) La région centrale de M87. Les cercles indiquent les positions des gaz dont les intensités sont données en a). Le cœur de M87 se trouve à mi-chemin entre ces cercles.

b) Le gaz tourne autour du cœur de la galaxie parce qu'il subit une force gravitationnelle générée par la masse M de ce cœur. Quelle est cette masse exprimée en multiples de la masse du Soleil, M_S (= $1{,}99 \times 10^{30}$ kg)?

SOLUTION: Ici, deux **concepts clés** entrent en jeu.

1. D'après l'équation 14.1 du volume 1, le module F de la force gravitationnelle exercée sur un élément gazeux de masse m orbitant à un rayon r est
$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$
2. Si l'élément gazeux décrit un cercle autour du cœur de la galaxie, il doit avoir une accélération centripète de module $a_c = v^2/r$, orientée vers le cœur.
3. Selon la deuxième loi de Newton, formulée pour un axe radial sortant du cœur et se dirigeant vers l'élément gazeux, $F_{rés,r} = ma_r$.

Si on rassemble ces trois concepts, on obtient:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Si on isole M et si on insère les données fournies, on obtient

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(5{,}38 \times 10^5 \text{ m/s})^2(100 \text{ al})(9{,}46 \times 10^{15} \text{ m/al})}{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2} = 4 \times 10^{39} \text{ kg} = (2 \times 10^9)M_s. \quad \text{(réponse)}$$

Ce résultat indique qu'une masse équivalant à deux milliards de soleils est comprimée dans le cœur de la galaxie, ce qui suggère fortement qu'un trou noir extrêmement massif occupe ce cœur.

Exemple 8.7

Le proton ayant la plus grande quantité d'énergie jamais détectée dans les rayons cosmiques atteignant la Terre possédait une étonnante énergie cinétique de $3{,}0 \times 10^{20}$ eV (suffisamment d'énergie pour faire grimper de quelques degrés Celsius la température d'une cuillère à thé d'eau).

a) Quels étaient le facteur de Lorentz γ du proton et sa vitesse v (tous deux par rapport au détecteur sur Terre) ?

SOLUTION : On emploie ici un premier concept clé : le facteur de Lorentz γ du proton relie l'énergie totale E avec l'énergie au repos mc^2 par l'équation 8.47 ($E = \gamma mc^2$). Le deuxième concept clé est que l'énergie totale du proton est la somme de son énergie au repos mc^2 et de son énergie cinétique K (connue). Si on combine ces deux concepts, on obtient :

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + K}{mc^2} = 1 + \frac{K}{mc^2}.$$

On peut obtenir l'énergie au repos mc^2 du proton à partir de sa masse (exprimée en MeV/c^2 dans l'annexe B), comme on l'a fait pour l'électron de l'exemple 8.6 a). Ainsi, mc^2 est 938 MeV (comme l'indique le tableau 8.3). Si on insère cette valeur et l'énergie cinétique connue dans l'équation précédente, on obtient :

$$\gamma = 1 + \frac{(3{,}0 \times 10^{20}\ \text{eV})}{(938 \times 10^{6}\ \text{eV})}$$
$$= 3{,}198 \times 10^{11} \approx 3{,}2 \times 10^{11}. \qquad \text{(réponse)}$$

Cette valeur de γ est si grande qu'on ne peut utiliser la définition de γ (équation 8.8) pour déterminer v. Essayez-le ; votre calculatrice vous indiquera que β a une valeur égale à 1 et que v est égale à c. En fait, v est très proche de c, mais on veut une valeur plus précise, que l'on peut obtenir en résolvant d'abord l'équation 8.8 en fonction de $1 - \beta$. Pour commencer, on écrit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}},$$

où on a utilisé le fait que β est si près de l'unité que $1 + \beta$ possède une valeur très proche de 2. La vitesse que l'on cherche est contenue dans le terme $1 - \beta$. Si on isole $1 - \beta$, on obtient :

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{(2)(3{,}198 \times 10^{11})^2}$$
$$= 4{,}9 \times 10^{-24} \approx 5 \times 10^{-24}.$$

Donc,

$$\beta = 1 - 5 \times 10^{-24}.$$

Et, puisque $v = \beta c$,

$$v \approx 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \qquad \text{(réponse)}$$

b) Supposez que le proton traverse la Voie lactée sur son diamètre ($9{,}8 \times 10^4$ al). Combien de temps lui faut-il, approximativement, pour parcourir cette distance si on le mesure du référentiel commun de la Terre et de la Galaxie ?

SOLUTION : On vient juste de voir que ce proton *ultrarelativiste* voyage à une vitesse très peu inférieure à c. Donc, le concept clé applicable ici est que, selon la définition de l'année-lumière, la lumière prend 1 a pour parcourir 1 al ; elle devrait donc prendre $9{,}8 \times 10^4$ a pour parcourir $9{,}8 \times 10^4$ al, et ce proton devrait prendre à peu près le même temps. Par conséquent, du référentiel Terre-Voie lactée, le voyage du proton prend

$$\Delta t = 9{,}8 \times 10^4\ \text{a}. \qquad \text{(réponse)}$$

c) Combien de temps ce voyage dure-t-il dans le référentiel du proton ?

SOLUTION : Ici, on a besoin de quatre concepts clés.

1. Ce problème met en jeu deux mesures effectuées dans deux référentiels (inertiels), le référentiel Terre-Voie lactée et le référentiel du proton.
2. Ce problème met aussi en jeu deux événements : le premier se produit quand le proton entre dans la Galaxie, le second, quand il en sort.
3. Dans le référentiel du proton, on mesure un intervalle de temps propre Δt_0 parce que les événements s'y produisent au même endroit, à savoir au proton lui-même.
4. On peut déterminer l'intervalle de temps propre Δt_0 à l'aide de l'intervalle de temps Δt mesuré dans le référentiel Terre-Voie lactée en utilisant l'équation 8.9 ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$) de la dilatation du temps.

Si on isole Δt_0 dans l'équation 8.9 et si on remplace γ par sa valeur obtenue en a) et Δt par sa valeur obtenue en b), on obtient :

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9{,}8 \times 10^4\ \text{a}}{3{,}198 \times 10^{11}}$$
$$= 3{,}06 \times 10^{-7}\ \text{a} = 9{,}7\ \text{s}. \qquad \text{(réponse)}$$

Dans le référentiel Terre-Voie lactée, le voyage dure 98 000 a. Dans le référentiel du proton, il dure... 9,7 s ! Comme on l'a énoncé au début du chapitre, le mouvement relatif peut modifier l'écoulement du temps ; on en a ici un exemple extrême.

Et d'autres encore ...

Exemple 28.1 Un objet se déplace avec une vitesse 0,2000*c*. Déterminer la valeur du facteur $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ à cette vitesse. Refaites le calcul pour une vitesse de 0,0020 c. Ne vous souciez pas des chiffres significatifs.

Solution : [Données : les vitesses de 0,2000 *c* et 0 0020 *c*. À trouver : $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$]. $\beta = v/c = 0{,}2000$, $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-0{,}0400} = 0{,}9798$ et $\gamma = 1/0{,}9798 = \boxed{1{,}021}$. Maintenant pour $v = 0{,}0020\ c$, $\beta = 0{,}0020$, $\beta^2 = 4{,}0 \times 10^{-6}$, $1-\beta^2 = 0{,}9999960$ et $\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}9999980$. Alors $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = \boxed{1,\ 000002}$.

Vérification rapide : Nous calculons maintenant une approximation, qui nous sera utile plus loin (p. 1076). En utilisant le développement du binôme de Newton avec $x = -\beta^2$ et $n = -\frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)\,x^2}{2} + \ldots$$

Si β^2 est faible, alors $x^2 = (-\beta^2)^2$ et toutes les puissances supérieures sont négligeables. Nous pouvons alors écrire :

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \approx 1 + nx \approx 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$= 1 + 0{,}000004\ 0/2 = 1{,}000002.$$

Exemple 28.2 Un étudiant, mesure la période d'une masse oscillant à l'extrémité d'un ressort et obtient 2,00 s. Supposons que des extra-terrestres à bord d'un vaisseau spatial animé d'une vitesse de 0,50 c, observent le même phénomène car ils n'ont rien de mieux à faire ; quelle période trouvent-ils ? Le déplacement rapide entraîne un substantiel décalage dû au temps de communication ; on suppose que les astronautes font les corrections nécessaires.

Solution : [Données : $v = 0{,}50\ c$ et $\Delta t_S = 2{,}00$ s. À trouver : la période observée par les Martiens]. La période mesurée par l'observateur au repos par rapport au système est 2,00 s. La période mesurée par les petits hommes verts est donnée par l'Éq. (28.3) :

$$\Delta t_M = \gamma\,\Delta t_S = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\Delta t_S$$

Ici : $\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}866$ et $\boxed{\Delta t_M = 2{,}3\ \text{s}}$.

Vérification rapide : L'intervalle de temps est dilaté comme il le doit ; les visiteurs voient les oscillations plus lentes que ce que voit l'étudiant. De plus, pour $\beta = 0{,}5$, la valeur calculée de γ est en accord avec le tableau 28.2.

Exemple 28.3 Une soucoupe volante descend verticalement vers la Terre à la vitesse de 0,4000 *c*. Elle est d'abord observée par un astronome au sol, au moment où elle passe à côté d'un satellite à une altitude de 3000 km. À cet instant, quelle est l'altitude du satellite, mesurée par le navigateur de la soucoupe ?

Solution : [Données : $L_S = 3000$ km et $v = 0{,}400\ 0\ c$. À trouver : l'altitude]. La hauteur mesurée par un observateur terrestre par rapport auquel le satellite est considéré comme immobile (sa vitesse est faible devant *c*) est $L_S = 3000$ km. D'après l'Éq. (28.5) :

$$L_M = L_S\sqrt{1 - v^2/c^2} = (3000\ \text{km})\sqrt{1 - 0{,}1600}$$

soit : $\boxed{L_M = 2750\ \text{km}}$.

Vérification rapide : La vitesse n'est pas très élevée ; on s'attend donc à une relativement petite contraction. Le Tableau 28.2 confirme que $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0{,}92$.

Exemple 28.4 Un vaisseau spatial quelque part dans un futur éloigné se dirige vers une galaxie située à 200 années-lumière de la Terre, selon des textes humains d'astronomie. Le vaisseau a une vitesse de croisière de 0,999 *c*. Quelle est la distance Terre-galaxie que mesure le navigateur ?

Solution : [Données : $L_S = 200$ a-l et $v = 0{,}999\ c$. À trouver : la distance]. Pour utiliser l'Éq. (28.5), notons que L_M est la distance vue par l'observateur en mouvement (ou ce qui revient au même par l'observateur par rapport auquel le système est en mouvement) et L_S est la longueur propre du système (mesurée par un observateur au repos par rapport au système). Alors :

$$L_M = L_S\sqrt{1 - v^2/c^2} = (200\ \text{a-l})\sqrt{1 - (0{,}999)^2}$$

soit : $\boxed{L_M = 8{,}94\ \text{a-l}}$.

Vérification rapide : La vitesse est très élevée ; on s'attend donc à une grande contraction. Le tableau 28.2 donne $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0{,}0447$. À ces grandes vitesses, la longueur est réduite à une petite fraction de la longueur propre. Pour avoir une idée des valeurs prévues, reportez-vous à ce tableau.

Exemple 28.5 La galaxie la plus proche à la nôtre est une galaxie de forme diffuse appelée Nuage de Magellan à environ $1{,}70 \times 10^5$ a-l de Bruxelles. En supposant qu'on puisse atteindre une vitesse de 0,99999 c en un temps très court (ce qui est pure imagination), combien de temps prendrait ce voyage ? Jusqu'à présent, la plus grande vitesse atteinte par un humain est seulement d'environ 0,000037 c (sonde Appolo).

Solution : [Données : $v = 0{,}99999\ c$ et $L_S = 1{,}70 \times 10^5$ a-l. À trouver : le temps de vol T_s selon l'horloge du voyageur]. Le voyageur voit une distance contractée $L_S\sqrt{1 - v^2/c^2}$, qu'il doit parcourir à une vitesse $v = 0{,}99999\ c$. Le temps propre est donc :

$$T_S = \frac{L_S\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}$$

$$T_S = \frac{(1{,}70 \times 10^5 \text{ a-l})(4{,}47212 \times 10^{-3})}{0{,}999\,99\ c}$$

soit :

$$T_S = \frac{760 \text{ a-l}}{c} = \boxed{760 \text{ ans}}$$

Il semble donc qu'il nous est impossible d'atteindre une autre galaxie avec notre technologie.

Vérification rapide : Le tableau 28.2 confirme la valeur de $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. En multipliant 760 a par γ, nous trouvons $1{,}7 \times 10^5$ a, qui est le temps que nous mesurons sur Terre pour ce voyage de $1{,}70 \times 10^5$ a-l à la vitesse de 0,99999 c.

Exemple 28.6 Deux galaxies, alignées avec la Terre, s'éloignent de celle-ci dans des directions opposées, chacune avec une vitesse de 0,75 c. À quelle vitesse se déplacent-elles, l'une par rapport à l'autre ?

Solution : [Données : les vitesses galactiques de 0,75 c. À trouver : la vitesse relative]. Nous avons trois corps en mouvement. Dans la Fig. 28.15, S est le référentiel de l'une des galaxies et S' est celui de la Terre. Soit P l'autre galaxie. S' se déplace vers la droite par rapport à S avec une vitesse $v_{O'O} = 0{,}75\ c$ et P se déplace vers la droite par rapport à S' avec une vitesse $v_{PO'} = 0{,}75\ c$. La vitesse de P par rapport à S est donnée par l'Éq. (28.7) :

$$v_{PO} = \frac{v_{PO'} + v_{O'O}}{1 + \dfrac{v_{PO'}\, v_{O'O}}{c^2}} = \frac{0{,}75c + 0{,}75c}{1 + \dfrac{(075c)(0{,}75c)}{c^2}} = 0{,}96c$$

Ainsi les deux galaxies s'éloignent, l'une de l'autre à la vitesse 0,96 c.

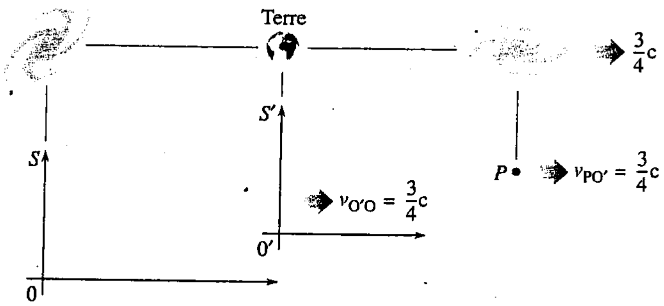

Figure 28.15 La galaxie à droite, au point P s'éloigne de O' dans S' (la Terre) avec une vitesse $v_{PO'} = 0{,}75\ c$. Par rapport à la galaxie à gauche (au repos dans S), la Terre se déplace vers la droite avec une vitesse $v_{O'O} = 0{,}75\ c$.

Vérification rapide : Ce résultat est pour le moins raisonnable ; car les galaxies ne peuvent pas s'éloigner l'une de l'autre à une vitesse égale ou supérieure à c. L'équation (28.7) prévoit que seuls des photons qui se propagent dans deux directions opposées ($v_{PO'} = c$ et $v_{O'O} = c$) s'éloignent l'un de l'autre avec une vitesse c.

Exemple 28.7 L'électron a une masse de $9{,}1094 \times 10^{-31}$ kg. Quelle est sa quantité de mouvement, s'il a une vitesse de $0{,}99c$?

Solution : [Données : $m = 9{,}1094 \times 10^{-31}$ kg et $v = 0{,}99c$. À trouver : p]. La quantité de mouvement relativiste est donnée par l'Éq. (28.8). Nous trouvons $\gamma = 7{,}0888$; d'où :

$$p = \gamma m v$$

$$p = (7{,}0888)(9{,}1094 \times 10^{-31} \text{ kg})(2{,}9679 \times 10^8 \text{ m/s})$$

soit $p = 1{,}9165 \times 10^{-21}$ kg.m/s = $\boxed{1{,}9 \times 10^{-21} \text{ kg. m/s}}$.

Vérification rapide : D'après le tableau 28.2, la valeur de $\gamma = 7$ semble être bonne. La quantité de mouvement classique est environ $(9{,}1 \times 10^{-31})(3 \times 10^8) = 27 \times 10^{-23}$ kg.m/s. Notre réponse devrait donc être proche de $7(27 \times 10^{-23})$, ce qui est le cas.

Exemple 28.8 L'électron a une énergie au repos de 0,511 MeV. Déterminez l'énergie totale et l'énergie cinétique d'un électron qui se déplace à la vitesse de $0{,}900c$? Donnez vos réponses en MeV.

Solution : [Données : $E_0 = 0{,}511$ MeV et $v = 0{,}900c$. À trouver : E et E_C]. Comme $E = \gamma mc^2$, déterminons d'abord γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}900)^2}} = 2{,}29$$

Puis notant que $mc^2 = 0{,}511$ MeV, alors :

$$E = 2{,}29\ (0{,}511 \text{ MeV}) = \boxed{1{,}17 \text{ MeV}}$$

L'Éq. (28.12) donne l'énergie cinétique :

$$E_C = E - E_0 = 1{,}172 \text{ MeV} - 0{,}511 \text{ MeV}$$

soit :

$$\boxed{E_C = 0{,}661 \text{ MeV}}$$

Vérification rapide : Le facteur γ est plus grand que 1 et il est en accord avec le Tableau 28.2. Comme nous verrons dans l'exercice 61, l'énergie au repos d'une particule est égale à son énergie cinétique lorsque $\beta = 0{,}866$; ce calcul où $\beta = 0{,}900$ donne donc le bon ordre de grandeur.

Exemple 28.9 Un poulet de 1,00 kg est complètement converti en énergie électromagnétique par le transporteur d'un vaisseau spatial de science fiction, processus qui est théoriquement possible, quoique largement hors de portée de nos pauvres moyens technologiques. Quelle est l'énergie équivalente ainsi obtenue ? Quel est son équivalent en kilowattheures ?

Solution : [Données : m = 1,00 kg. À trouver : E_o]. De l'Éq. (28.13) :

$$E_o = mc^2 = (1{,}00 \text{ kg})(2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$

soit :

$$E_o = 8{,}99 \times 10^{16} \text{ J}$$

Comme 1 kilowattheure = 1000 J/s × 60 s/min × 60 min = 3,60 MJ, cette énergie est donc égale à $E_o = 2{,}50 \times 10^{10}$ kW.h. Elle permet d'allumer dix lampes de 100 W pendant $2{,}5 \times 10^{10}$ heures (environ 3 millions d'années).

➤ **Vérification rapide :** Comme 1 kg → $5{,}6 \times 10^{29}$ MeV et 1 MeV=$1{,}6 \times 10^{-13}$ J, 1 kg → 9×10^{16} J.

Exemple 28.10 Il y a plusieurs réactions de fusion, qui convertissent directement la masse en énergie pour alimenter les étoiles et les bombes thermonucléaires (à hydrogène). Dans l'un de ces processus, deux noyaux d'hydrogène lourd (deutérium) fusionnent ensemble et produisent un noyau d'hydrogène encore plus lourd (tritium), un noyau ordinaire d'hydrogène (proton) et communique de l'énergie cinétique à ces noyaux. On écrit habituellement une telle réaction en considérant les atomes neutres (ce qui revient à négliger la petite énergie de liaison des électrons à chaque atome, qui est de l'ordre de 10 eV). On écrit donc :

$${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + \text{énergie}$$

Déterminez l'énergie libérée dans chaque fusion.

Solution : [Données : la réaction. À trouver : l'énergie libérée]. L'énergie est conservée ; l'énergie totale initiale doit être égale à l'énergie totale finale. Autrement dit, la différence de la somme des énergies au repos initiales et la somme des énergies au repos finales est l'énergie cinétique libérée. Du tableau 28.3, nous déduisons :

$$E_C = 1876{,}12 \text{ MeV} + 1876{,}12 \text{ MeV} - 2809{,}43 \text{ MeV} - 938{,}783 \text{ MeV}$$

$$E_C = 4{,}03 \text{ MeV} = \boxed{6{,}45 \times 10^{-13} \text{ J}}$$

où nous avons utilisé la relation 1 MeV = $1{,}602 \times 10^{-13}$ J.

➤ **Vérification rapide :** Les réactions nucléaires mettent en jeu des énergies de plusieurs MeV ; notre résultat a donc le bon ordre de grandeur.

Exemple 28.11 Un proton (de masse 938,3 MeV/c^2) est accéléré sous une différence de potentiel de 202,0 MV ; il acquiert alors une énergie cinétique de 202,0 MeV. Déterminer son énergie totale (en MeV) et sa quantité de mouvement (en MeV/c). Quelle est alors sa vitesse ?

Solution : [Données : m = 938,3 MeV/c^2, E_C = 202,0 MeV. À trouver : E et p]. $E = E_C + E_o = E_C + mc^2$ = 202,0 MeV + (938,3 MeV/c^2)c^2 = 1140 MeV. De l'Éq. (28.15), nous déduisons :

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = \boxed{647{,}5 \text{ MeV}/c}$$

Pour trouver la vitesse, nous utilisons le fait que $E = \gamma E_o = E_o/\sqrt{1 - v^2/c^2}$; alors :

$$v = c\sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{938{,}3}{1140}\right)^2} = \boxed{0{,}5683c}$$

➤ **Vérification rapide :** $p = \gamma mv$, $v = p/\gamma m = p/(E/c^2)$ = (647,5 MeV/c)/(1140 MeV/c^2) = 0,5680c.

Exemple 28.12 Le pion neutre a une masse égale à 264 fois celle de l'électron et une énergie au repos de 135 MeV. Il est instable et se désintègre en deux rayons γ (photons). S'il est au repos les deux photons ont des directions opposées, déterminez alors l'énergie et la quantité de mouvement de chaque photon.

Solution : [Données : E_o = 135 MeV. À trouver : E et p pour les photons]. Comme le pion se désintègre au repos, sa quantité de mouvement est nulle, $p = 0$; les quantités de mouvement des photons sont donc opposées. L'énergie totale des deux photons (2E) doit être égale à celle du pion : 135 MeV = 2E. L'énergie de chaque photon est donc $\boxed{E = 67{,}5 \text{ MeV}}$. De l'Éq. (28.16), pour des particules sans masse, nous déduisons :

$$p = \frac{E}{c} = \boxed{67{,}5 \text{ MeV}/c}$$

et comme 1 MeV/c = $5{,}344 \times 10^{-22}$ kg.m/s, $p = 3{,}61 \times 10^{-20}$ kg.m/s.

➤ **Vérification rapide :** $m = 264\,(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg}) = 2{,}4 \times 10^{-28}$ kg ; l'énergie de chaque photon est la moitié de l'énergie du pion $E = \frac{1}{2}mc^2 = 1{,}08 \times 10^{-11}$ J = 67,5 MeV.