Mécanique : applications.

Oscillations

1 - Pendules

* pendule pesant : $\vec{u}$ ⊙

un pendule pesant est un objet de masse m ; moment d'inertie J_0 et de centre d'inertie G. Il est accroché en O.

on l'écarte de sa position d'équilibre verticale : (θ angle entre $\vec{g}$ et $\overrightarrow{OG}$)

$\frac{dL_0}{dt} = J_0 \ddot{\theta} \vec{u} = \mathcal{M}_{\vec{P}} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = -mg \sin\theta\, h$

soit : $\ddot{\theta} + \frac{mgh}{J_0} \sin\theta = 0 \rightarrow$ "petites oscillations" $\omega_0^2 = \frac{mgh}{J_0}$

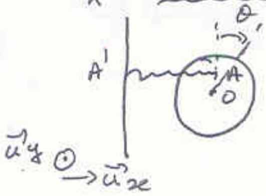
cas particulier :
$\rightarrow$ point materiel au bout d'un fil $OG = \ell$: $J_0 = m\ell^2 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$
= pendule simple

$\rightarrow$ solide = barre longueur ℓ, masse m : $J_0 = \frac{m\ell^2}{3} \rightarrow \omega_0^2 = \frac{3g}{2\ell}$

$\leadsto$ La répartition de masse ↑ ω_0 donc ↘ T... → cf volants d'inertie.

2 - Avec des ressorts.

* cerceau :



Une roue peut tourner autour d'un axe passant par son centre O. Un ressort fixé en A' est aussi fixé en A sur un rayon de la roue.

A l'équilibre $A_0A' = \ell_0$ = longueur à vide du ressort.

Roue : m, R, $J = mR^2$.

on l'écarte d'un angle $\theta_0 \longrightarrow$ eq des "petites oscillations"

TMC en O (on ne connait pas la réaction de l'axe en O).

$J\ddot{\theta} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{f} = \overrightarrow{OA} \wedge (-k(A'A - \ell_0))\vec{u}_x$ $\qquad AA' = \ell_0 + r\theta$ si θ petit. ($r = A'A_0$)

$J\ddot{\theta} = -kr^2\theta \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{kr^2}{J}\theta = 0$

$\omega_0^2 = \frac{kr^2}{mR^2}$ $\qquad$ si $r = R$: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ comme un point materiel.

variante : 2 ressorts :

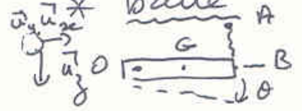
eq. $A'A_0 = B'B_0 = \ell_0$

↳ les 2 forces de rappel sont équivalentes à un couple Γ de rappel

$\Gamma = -2r\,k(r\theta) \rightarrow J\ddot{\theta} = \Gamma \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2r^2k}{J}\theta = 0$

↑ allongement qd $\theta \neq 0$

* barre



une barre (m, L, J_0) est fixée en O et aussi en B à un ressort (ℓ_0, k).
A l'équilibre elle est horizontale, on l'écarte légèrement.

TMC en O (on ne connait pas la réaction de l'axe de rotation)

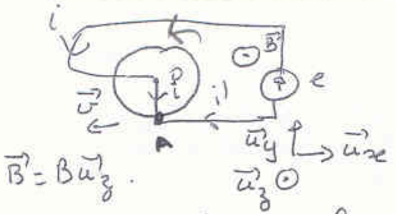
~~expo~~ équilibre : $AB_0 =$ $\quad J_0\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\vec{P}} + \mathcal{M}_{\vec{f}_{ressort}} = 0 = \frac{L}{2} mg - k(x_{eq} - \ell_0)L \rightarrow x_{eq}$

mouvement : $AB \sim x_{eq} + L\theta$

$J\ddot{\theta} = -kL^2\theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kL^2}{\frac{mL^2}{3}}\theta = 0 \quad \omega_0^2 = 3\frac{k}{m}$

cf + haut...

Roue de Barlow entraînée.



Une roue (disque) de rayon a, résistance électrique R, moment J_0 est placée dans un champ $\vec B$ uniforme et constant, et ferme un circuit alimenté par la fem e.

Étude du mouvement.

• e ⇒ i → force de Laplace : $-i a \vec u_y \wedge B\vec u_z = -iaB\vec u_x$ $\quad i = \frac{e}{R}$

$\vec F_{L1} = -\frac{e}{R} aB \vec u_x$.

$\vec F_{L1}$ ⇒ mvt → vitesse $\vec\omega = \omega \vec u_z = \frac{v}{a}\vec u_z$ → i' car $\vec v$ ⇒ champ électrom.

$\vec E_m = \vec v \wedge \vec B \Rightarrow e' = \int_{\text{rayon}} (\vec v\wedge\vec B)\cdot \underset{\text{orienté par } i'}{\vec{dl}} = \frac{a^2B\omega}{2} \to i' = \frac{e'}{R} = \frac{a^2B\omega}{2R}$

↪ F'_L qui s'oppose à F_L

d'où : $-J_0\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{2}\times(F_L + F'_L) = -\frac{a^2}{2R}eB + \frac{a^3}{4R}B\omega = -J_0\dot\omega$

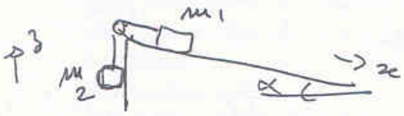
TMC en O — sens de rotation — s'applique au milieu

soit : $\dot\omega + \frac{a^3B}{4JR}\omega = +\frac{a^2eB}{2R}$

solution en $\omega(t) = \omega_0(1-\exp -t/\tau)$ avec $\omega_0 = \frac{a^2eB}{4R} = \omega_{limite}$.

NB : on peut vérifier l'homogénéité...

Machine d'Atwood.



1 poulie ; 1 masse m_1 ; 1 masse m_2 reliées par un fil

$m_1 > m_2$

1- poulie sans inertie : toutes les tensions sont égales.

force motrice : le poids dominant :

$v_1 = v_2$ mais $L = cte = (h - z_2) + x_1 \Rightarrow \dot z = +\dot x \to \ddot z = +\ddot x$ $\quad$ posons $a = \ddot x$

Ainsi : $\left.\begin{array}{l} m_2 g - T = m_2\ddot z = +m_2 a \\ -m_1\sin\alpha\, g + T = m_1\ddot x = m_1 a \end{array}\right\} \to a = \frac{|m_1\sin\alpha - m_2|}{m_1+m_2} g$ (>0 si $m_1\sin\alpha > m_2$)

et les 2 tensions sont égales à $T = \frac{m_1m_2g}{m_1+m_2}(1+\sin\alpha)$

2- poulie avec inertie. le fil reste sans masse et roule sans glissement.

moment d'inertie I ;

on a toujours $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$ | en module (action-réaction)

mais cette fois : $T_1 \neq T_2$ car la poulie a une inertie donc une accélération.

$\left.\begin{array}{l} \dot x = \dot z = R\dot\theta \quad \text{roulement sans glissement} \\ m_1 a = m_1\sin\alpha\, g - T_1 \\ m_2 a = -m_2 g + T_2 \\ J\ddot\theta = R(T'_2 - T'_1) \\ \quad R(-T_2 + T_1) \end{array}\right\}$ 4 eq 4 inconnues : a, $\dot\theta$, $\ddot\theta$, T_1, T_2

avec cette fois-ci $T_1 \neq T_2$ à cause du $J\ddot\theta \neq 0$