Mécanique du solide et des systèmes

- **Système non ponctuel**

Mécanique du point : inertie = m

si masse non ponctuelle ⟹ tenir compte de la "répartition" ⟺ J.

$\boxed{J : \text{moment d'inertie}}$ caractérise la répartition de masse autour d'un point ou d'un axe.

"$J = \iiint r^2 dm$" r : distance de la masse dm à l'axe ou au point.

Exemple : $J_{cerceau} = mR^2$; $J_{\substack{disque \\ cylindre}} = \frac{1}{2} mR^2$; $J_{sphère} = \frac{2}{5} mR^2$

- par rapport à l'axe.
- pour une barre homogène : (masse m, longueur l) $J_{milieu} = \frac{ml^2}{12}$; $J_{extrémité} = \frac{ml^2}{3}$

* Thm de Huygens : obtention de J'_Δ pour un axe Δ' à la distance d de Δ

$$\boxed{J_{\Delta'} = J_\Delta + md^2}$$: permet de changer d'axe.

- **Eléments cinétiques des systèmes.**

⟹ répartition de masse non ponctuelle → influence sur le mouvement

⟹ Thm de Köenig : $\boxed{A = A_G + A^*}$

A^* grandeur dans le ref barycentrique

A_G : grandeur ~ G pt matériel.

$$\vec{P} = m\vec{V}_G + \vec{0}$$
$$E_c = \frac{1}{2} m V_G^2 + E_c^*$$
$$\vec{L}_O = \vec{OG} \wedge m\vec{V}_G + \vec{L}^*$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}^* &= \vec{0} \\ E_c^* &= \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^{*2} \\ L^* &= J_G \dot{\theta}^* \end{aligned}\right\} \text{exemples.}$$

R^* : ref lié à G en translation.

- **conséquences dynamiques.**

* solide en rotation / axe : $\left\{ \begin{aligned} m &\to J \text{ (moment d'inertie)} \\ \vec{f} &\to \vec{M}_{O\vec{f}} = \vec{O\Pi} \wedge \vec{f} : \text{moment d'une force.} \\ RFD &\to TMC \end{aligned} \right.$

$$\frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \Sigma \vec{\mathcal{M}}_\Delta \vec{f}$$

pratique : $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \mathcal{M}_{ext/G}$; $\boxed{J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{ext/\Delta}}$

Δ axe fixe ; ref galiléen

$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \; ; \; L^* = J_\Delta \dot{\theta}}$

* systèmes complexes.

: Définir les inconnues cinétiques et dynamiques.

: Utiliser les Thm pour avoir des relations.

* glissement

. roulement sans glissement : $\vec{V}_{pt\ de\ contact} = \vec{0}$ ⟹ "$\dot{x} = R\dot{\theta}$" $\vec{V_I} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \wedge \vec{AI}$

* forces particulières : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$: réaction

- frottements.
  - pas de glissement : frottement statique : $T \leq f_s N$ ⟺ "cône"
  - avec glissement : frottement cinétique : $T = f_c N$ $\vec{v}_g // \vec{T}$

(Réaction = contrainte)

- couple Γ
  - . $J\ddot{\theta} = \Gamma$
  - . couple de forces $\Gamma = f \times d = 2fR$
- tension d'un fil
  force à appliquer pour conserver la dynamique si on coupe le fil.
  ⟹ poulie sans inertie : transmet les tensions en module

• systèmes isolés.

conservation $\vec{p}$ ⟵ translation.
$\vec{L}$ ⟵ rotation.

isolé : $\vec{p} = cte \Rightarrow \Sigma \vec{F} = \vec{0}$
$\vec{L} = cte \Rightarrow \Sigma \vec{M} = \vec{0}$

* cas des chocs : toujours conservation de $\vec{p}$, $\vec{L}_{O,\Delta}$
  - si élastique : conservation de E_c
  - si inélastique : → dissipation = travail interne.

* Cas de la "masse variable"

↳ se ramener à un système de masse constante = système fermé.
↳ conservation de $\vec{p}$

fusée : système = fusée + gaz

Les systèmes à masse variable Si un système a une masse variable, il faut en élargir les frontières jusqu'à ce qu'elles englobent un système plus grand dont la masse *demeure* constante ; il est alors possible d'appliquer la loi de la conservation de la quantité de mouvement. Dans le cas d'une fusée, cela signifie que le système doit comprendre à la fois la fusée et ses gaz d'échappement. L'analyse d'un tel système indique que, en l'absence de forces extérieures, l'accélération d'une fusée est obtenue par l'équation suivante :

$R = \left|\frac{dM}{dt}\right|$

$$R\vec{v}_{\text{rel}} = M\vec{a} \quad \text{(première équation d'une fusée)}, \qquad (9.42)$$

où M est la masse instantanée de la fusée (y compris le carburant pas encore utilisé), R est le taux de combustion du carburant et $\vec{v}_{\text{rel}}$ est la vitesse d'expulsion des gaz d'échappement par rapport à la fusée. Le terme $R\vec{v}_{\text{rel}}$ est appelé la **poussée** de la fusée. Dans le cas d'une fusée pour laquelle R et $\vec{v}_{\text{rel}}$ sont constants et dont la vitesse passe de $\vec{v}_i$ à $\vec{v}_f$ quand sa masse passe de M_i à M_f, on a :

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(deuxième équation d'une fusée)}. \qquad (9.43)$$

* Forces extérieures et variation d'énergie interne.

Les forces extérieures et les variations de l'énergie interne On peut obtenir une transformation d'énergie interne d'un système en énergie mécanique par l'intermédiaire d'une force extérieure. La variation de l'énergie interne est donnée par :

$$\Delta E_{\text{int}} = -Fd\cos\phi, \qquad (9.49)$$

où F est le module de la force extérieure, d, le module du déplacement du centre de masse du système et l'angle ϕ, l'angle compris entre les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{d}$. La variation de l'énergie mécanique est :

$$\Delta E_{\text{méc}} = \Delta K + \Delta U = Fd\cos\phi. \qquad (9.46, 9.45)$$