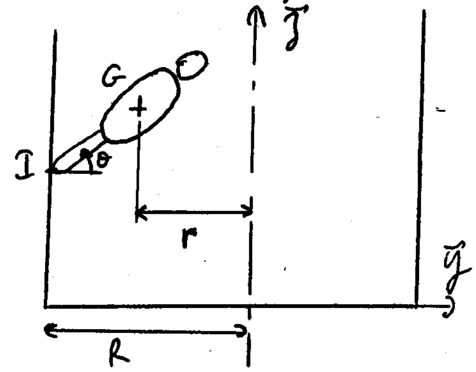
3) Frottement

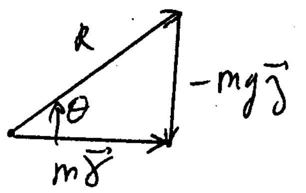
Q14 La dissipation par frottement conduit à une baisse de l'énergie mécanique. L'accélération de la masse conduit à une augmentation de la quantité de mouvement.

Q15 a) Le poids et l'action d'inertie s'exercent en G (centre de gravité). Pour respecter l'équilibre en moment, l'action du sol sur la roue au contact en I est nécessairement parallèle à (IG).
Il y a adhérence si l'action du sol est dans le cône de frottement, c'est à dire ssi $\tan\theta < f$.



PFD : $m\vec{\gamma} = -mg\vec{j} + \vec{R}$

et $\vec{\gamma} = \frac{V^2}{r}\vec{y} = \frac{V^2}{R - s\cos\theta}\vec{y}$



d'où $\tan\theta = \frac{mg}{\frac{mV^2}{R - s\cos\theta}} \Rightarrow V > \sqrt{\frac{g(R - s\cos\theta)}{f}} = 8{,}3\ m/s$
$= 30\ km/h$.

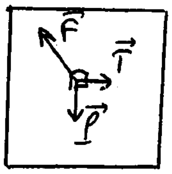
b) $\tan\theta = \frac{g}{V^2}(R - s\cos\theta)$ donc $\theta \searrow$ lorsque $V \nearrow$

$\theta_{max} = 40°$ car au-delà, il y a glissement

$\theta_{min} = 0°$ dans le cas d'une vitesse infinie !

c) Les conditions sont indépendantes de m donc les résultats ne changent pas avec passager.

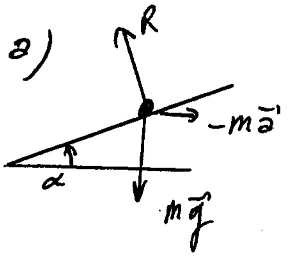
Q16 **d)** Impossible.
Il est possible d'effectuer une translation horizontale à vitesse cste mais il n'est pas possible de partir du repos et d'engager un mouvement horizontal à vitesse cste.



Pour envisager un départ à l'horizontale, il faut incliner $\vec F$ de façon à ce que $\vec T$ soit horizontal (en plan de glissement, $\vec T$ s'oppose à la vitesse de glissement)

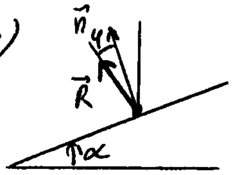
Or, dès que la masse se met en mouvement, le cone de frottement passe de μ_s à μ_k donc il n'y a plus équilibre entre $\vec F$, $\vec T$ et $\vec P$ et la masse pendule !

<u>Q17</u> a)



$$\tan\alpha = \frac{m\frac{V^2}{R}}{mg} = \frac{V^2}{Rg} \Rightarrow V_0 = \sqrt{Rg\tan\alpha}$$

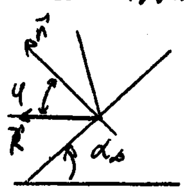
b)



b1) $V_{max} = \sqrt{Rg\tan(\alpha+\varphi)}$ et $\varphi = \arctan\mu = 31°$

b2) Si $\alpha > \varphi$, il faut que le véhicule aborde le virage avec une vitesse minimale de $V_{mini} = \sqrt{Rg\tan(\alpha-\varphi)}$ pour ne pas déraper.

c) La voiture peut aborder le virage avec une vitesse infinie



si $\alpha_\infty + \varphi = 90° \Rightarrow \alpha_\infty = 59°$.

La vitesse minimale est alors $V_{mini} = \sqrt{Rg\tan(\alpha_\infty-\varphi)}$

et $\tan(\alpha-\varphi) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\varphi}{1+\tan\alpha\tan\varphi}$ avec $\tan\varphi = f$ et $v_0^2 = Rg\tan\alpha$.

$$\Rightarrow V_{mini} = \sqrt{\frac{v_0^2 - Rgf}{1 + f\frac{v_0^2}{Rg}}}$$

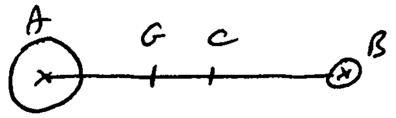
4) Statique du solide

Q18 Tension dans le câble : $T = m_1(g - a_1) = m_2(g - a_2)$ car la poulie est sans frottement.

or $a_1 = -a_2 \implies m_1(g + a_2) = m_2(g - a_2)$

$$\implies a_2 = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Q19



Barycentre : $AG = \frac{1}{2m+m+m}(0 + mAC + mAB)$

Réponse b) $AG = \frac{1}{4m}\left(\frac{mL}{2} + mL\right) = \frac{3L}{8}$.

Q20 Moments en A : (A : pt de contact planche/sol)

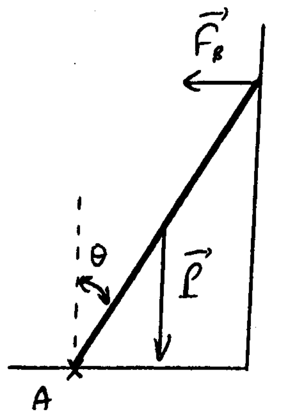
$-mgx + \rho S \sin\alpha\, L = 0$ d'où $x = \frac{\rho S L \sin\alpha}{mg} = \frac{L}{16} = 0{,}12\,m$.

Q21 Moments en O : $mg(0 + a + 2a + 3a + 4a) - 4aMg = 0$

$\implies M = \frac{5}{2}m$.

Q22 Réponse a)

Q23



Equilibre des moments en A :

$$L F_B \cos\theta - \frac{L}{2} P \sin\theta = 0$$

$$\implies F_B = \frac{mg}{2}\tan\theta = 57{,}7\ N.$$

Réponse d)

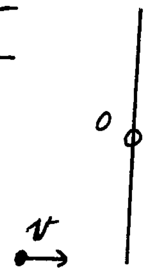
5) Dynamique du solide

Q24 Inertie en $(A, \vec{z})$: $I_A = I_0 + m\frac{L^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$.

Equation de moments en A : $I_A \ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2} + 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-mg\frac{L}{2}}{I_A} \quad \text{et} \quad \gamma_B = L\ddot{\theta} = \frac{-mgL^2}{2I_A} = \frac{-3g}{2}$$

Q25



Conservation du moment cinétique :

avant impact — Après impact

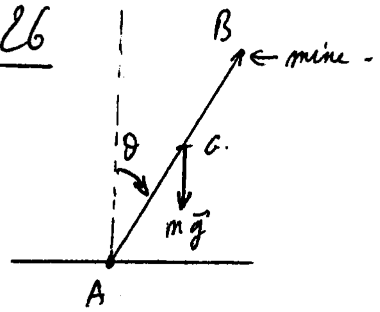
$$\underbrace{\vec{O}}_{\substack{\text{tige} \\ \text{(au repos)}}} + \underbrace{\vec{OA} \wedge m\vec{V}}_{\text{masse}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{pas de moment} \\ \text{extérieur en O.}}}{cste} = \underbrace{I\dot{\theta}}_{\text{tige}} + \underbrace{\vec{OA} \wedge m\vec{V}'}_{\text{masse}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{2} m v = I\dot{\theta} + \frac{d}{2} m \Big(\underbrace{\frac{d}{2}\dot{\theta}}_{v'}\Big)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\frac{d}{2} m v}{I + \frac{d^2}{4} m} = \frac{\frac{d}{2} m v}{\frac{d^2}{2} m + \frac{d^2}{4} m} = \frac{2v}{3d}.$$

Réponse a)

Q26



Energie mécanique constante :

$E_m = E_c + E_p = cste$

$\Rightarrow E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$.

$\Rightarrow 0 + \frac{mgL}{2} = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta$.

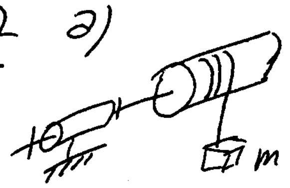
Par dérivation : $I_A \dot{\theta}\ddot{\theta} - mgL\dot{\theta}\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgL}{2I_A}\sin\theta. \quad \text{et} \quad I_A = \frac{mL^2}{3}$$

donc en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}$ et $\gamma_B = L\ddot{\theta} = \frac{3g}{2} > g$

Réponse b)

Q27 a)



Soit T la tension du câble.

PFD appliqué au rouleau : $I\ddot{\theta} = RT$

PFD appliqué à la masse : $ma = mg - T$

Relation cinématique : $a = R\ddot{\theta}$

d'où $I\ddot{\theta} = Rm(g - R\ddot{\theta}) \Rightarrow \underline{\ddot{\theta} = \dfrac{Rmg}{I + R^2 m}}$

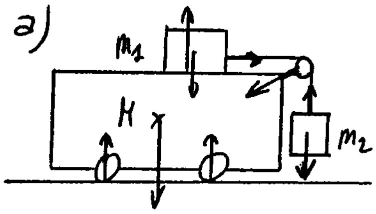
Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \text{cste}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + 0 = mgh + 0.$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2mgh}{I + mR^2} \quad \text{et} \quad \underline{E_c = mgh}.$$

b) A vous de chercher !

Q28 a)



b)
$$m_1 a_1 \vec{x} = \cancel{(P_1 + R_1)\vec{y}} + T_1 \vec{x}$$
$$m_2 a_2 \vec{y} = (P_2 - T_2) y \quad \text{et } T_2 = T_1 = T$$
$$M A \vec{x} = \cancel{P\vec{y} + 2R\vec{y}} - \frac{\sqrt{2}}{2} T(\vec{x} + \vec{y})$$

M accélère car seul l'effort de la poulie présente une composante suivant $\vec{x}$.

c) Relation cinématique due au câble : $a_2 = a_1 - A$.

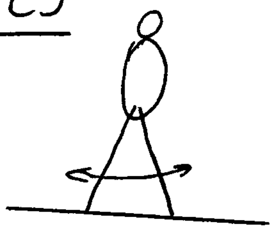
d) Résolution du système 4 éq. 4 inc. :
$$\left|\begin{array}{l} a_2 = g \times \left[1 + \dfrac{m_1}{m_2}\left(\dfrac{m_1}{M + \frac{\sqrt{2}}{2} m_1} + 1\right)\right]^{-1} \\ A = \dfrac{m_1}{M + \frac{\sqrt{2}}{2} m_1} a_2 \\ a_1 = a_2 + A \\ T = m_1 a_1 \end{array}\right.$$

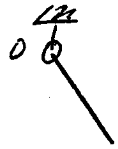
e) $M \to +\infty \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A = 0 \\ a_1 = a_2 = \dfrac{g\, m_2}{m_2 + m} \end{array}\right.$ (cas où M = bâti)

$m_1 \to 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_2 = g \\ A = 0 \end{array}\right.$ cas chute libre de m_2.

$m_2 \to 0 \Rightarrow$ repos !

Q29





Si l'homme marche à vitesse constante, son corps est supposé galiléen et la jambe forme un pendule !

$\left| \begin{array}{l} L \simeq 1\ m \\ m \simeq 15\ kg. \end{array} \right.$ (ordre de grandeur)

hyp : chaque jambe est une barre homogène : $I_0 = \frac{mL^2}{3}$

PFD, eq. de moment en O : $I_0 \ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta \simeq mg\frac{L}{2}\theta$

(Si θ est $\ll 1$)

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgL}{2I_0}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

ω_0 : pulsation propre du pendule.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2I_0}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

AN : $\left| \begin{array}{l} \omega_0 = 3{,}83\ rad/s \\ f_0 = 0{,}61\ Hz. \\ T_0 = 1{,}63\ s. \end{array} \right.$

(T_0 est un peu sur-estimé car l'hyp. de barre "homogène" conduit à un I_0 plus élevé que dans la réalité)

Amplitude angulaire des jambes $\simeq \pm 20°$

$\Rightarrow$ On avance de $2L\sin 20°$ à chaque $\frac{1}{2}$ période

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2L\sin 20°}{T/2} = 0{,}84\ m/s = 3\ km/h.$$

Effectivement, un homme marchant sans forcer avance à 3-4 km/h.