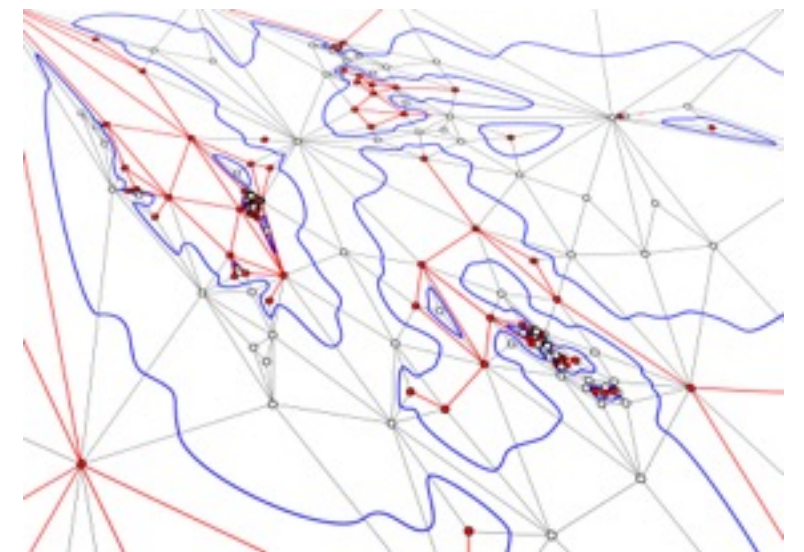
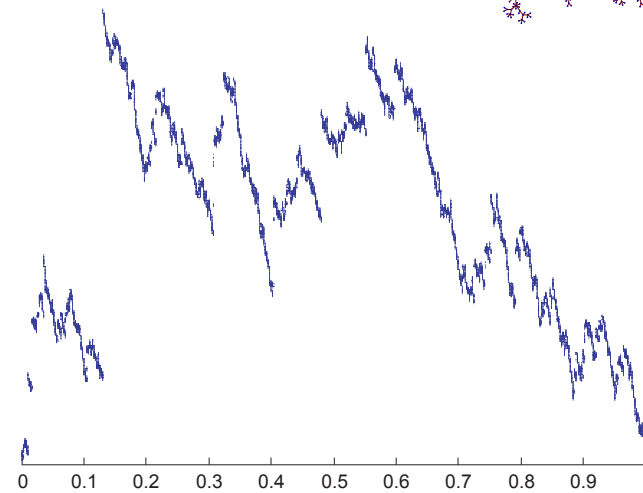
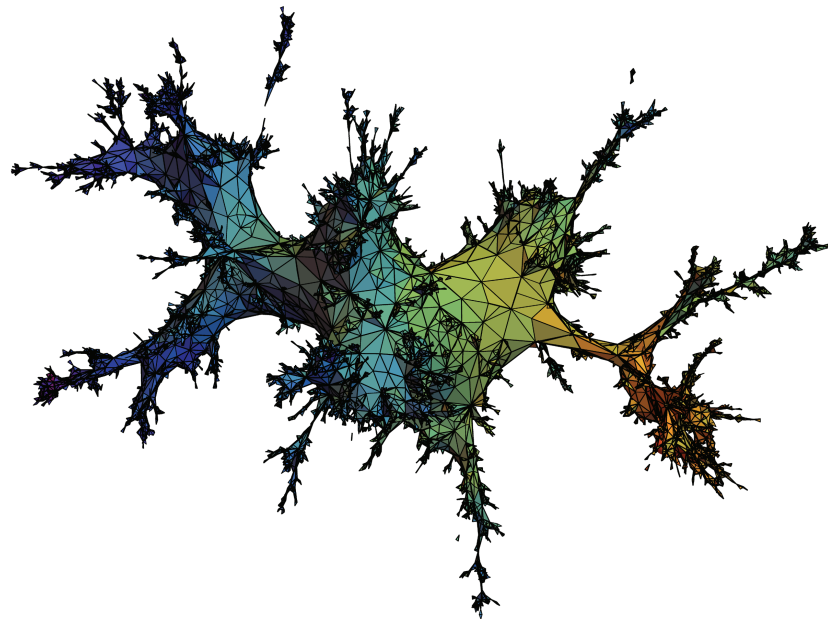
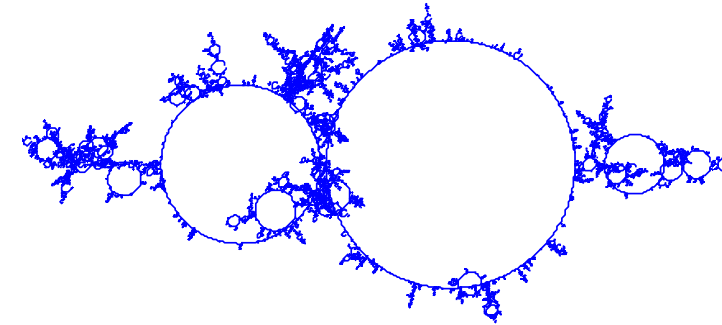
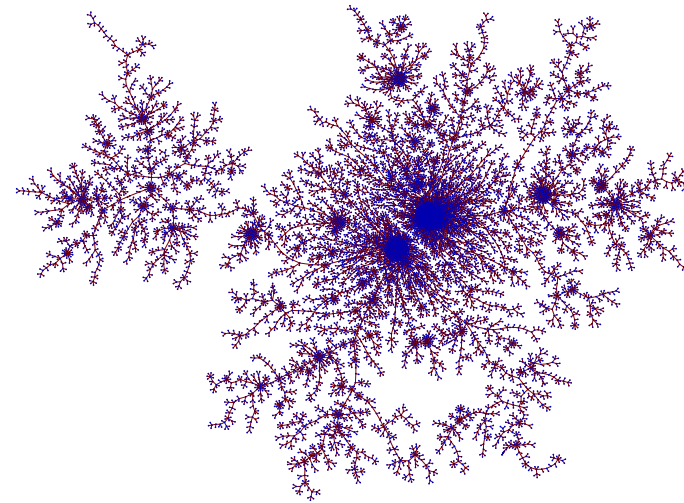
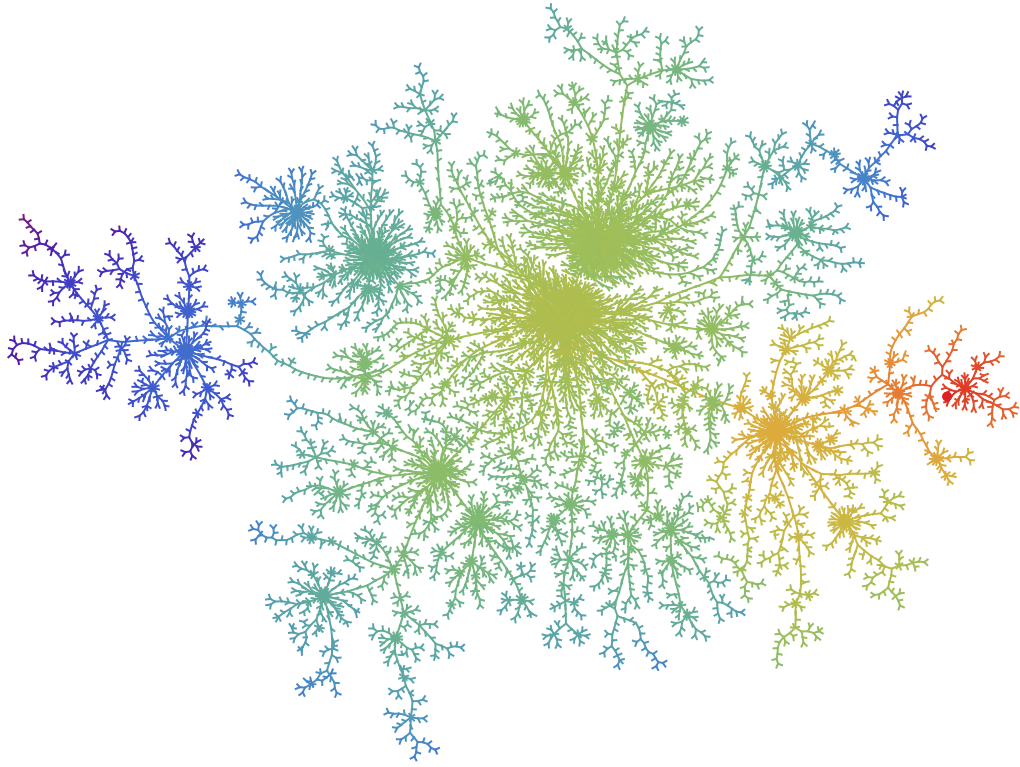


*Grands graphes planaires aléatoires*  
*et processus de Lévy*



Igor Kortchemski  
CNRS & École polytechnique

# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$



# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

Plusieurs intérêts :

↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .

# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- ↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- ↪ *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.

# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- ↪ *Du discret au continu* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par tous les  $X_n$  et passe à la limite,  $X$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
- ↪ *Du continu au discret* : si une certaine propriété  $\mathcal{P}$  est vérifiée par  $X$  et passe à la limite,  $X_n$  vérifie « à peu près »  $\mathcal{P}$  pour  $n$  grand.
- ↪ *Universalité* : si  $(Y_n)_{n \geq 1}$  est une autre suite d'objets discrets dont la limite d'échelle est  $X$ , alors  $X_n$  et  $Y_n$  ont à peu près les mêmes propriétés pour  $n$  grand.



# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

↪ Dans quel espace vivent les objets ?

# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

↳ *Dans quel espace vivent les objets ?* Un même espace métrique.

# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Un même espace métrique.

↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?*



# Limites d'échelle

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite d'objets « discrets »,  $(a_n)$  une suite et un objet « continu »  $X$  tels que :

$$\frac{1}{a_n} \cdot X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X.$$

- ↪ *Dans quel espace vivent les objets ?* Un même espace métrique.
- ↪ *Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont aléatoires ?*  
Convergence en loi.

# Plan

## **I. ARBRES ALÉATOIRES**

## **II. CONFIGURATIONS PLANES NON CROISÉES**

## **III. CARTES ALÉATOIRES**

## I. ARBRES ALÉATOIRES



## II. CONFIGURATIONS PLANES NON CROISÉES

## III. CARTES ALÉATOIRES



# *Arbres planaires*

On ne s'intéresse qu'aux arbres plans enracinés (=planaires).

# Arbres planaires

On ne s'intéresse qu'aux arbres plans enracinés (=planaires).

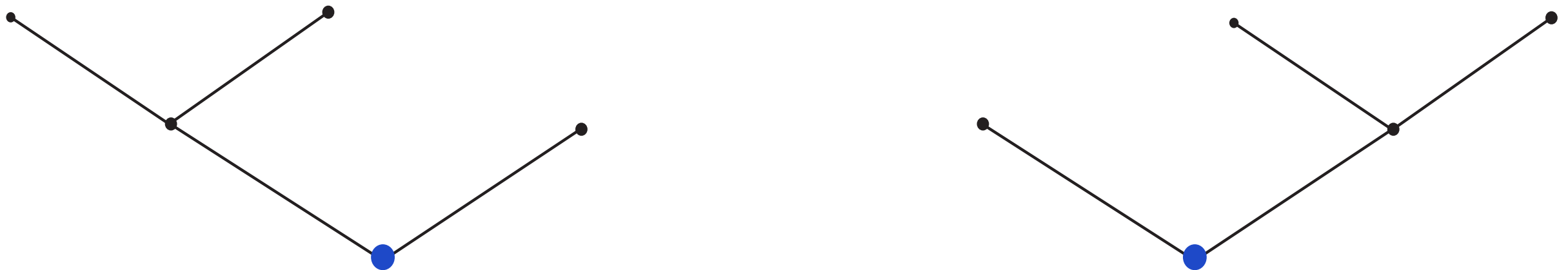


Figure – Deux arbres planaires différents.

# Arbres planaires

On ne s'intéresse qu'aux **arbres plans enracinés (=planaires)**.



Figure – Deux arbres planaires différents.

→ Question naturelle : à quoi ressemble un grand **arbre planaire** « typique » ?



# Arbres planaires

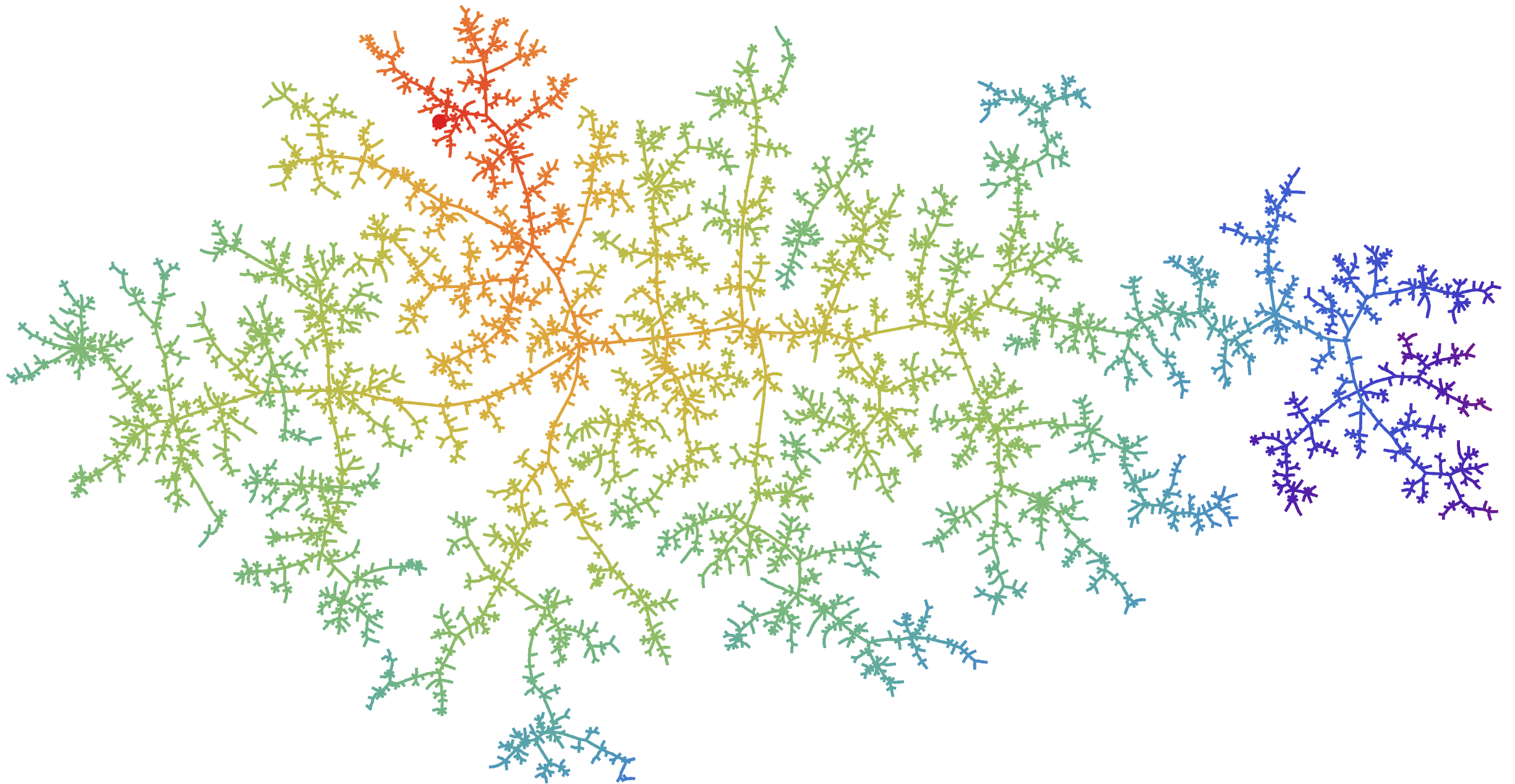
On ne s'intéresse qu'aux **arbres plans enracinés (=planaires)**.



Figure – Deux arbres planaires différents.

- Question naturelle : à quoi ressemble un grand **arbre planaire** « typique » ?
- On considère un grand **arbre planaire aléatoire**, choisi uniformément au hasard parmi tous les **arbres planaires** avec  $n$  sommets.

# *Simulation d'un grand arbre aléatoire planaire*



# Arbres planaires uniformes et ensemble grand-canonique

↗ Pour étudier un **arbre planaire** uniforme à  $n$  sommets, un point clé est qu'il peut être réalisé comme un **BGW arbre** conditionné à avoir  $n$  sommets, avec une loi de reproduction  $\mu(i) = \frac{1}{2^{i+1}}$  pour  $i \geq 0$ .

# Arbres planaires uniformes et ensemble grand-canonique

↪ Pour étudier un **arbre planaire** uniforme à  $n$  sommets, un point clé est qu'il peut être réalisé comme un **BGW arbre** conditionné à avoir  $n$  sommets, avec une loi de reproduction  $\mu(i) = \frac{1}{2^{i+1}}$  pour  $i \geq 0$ .

(Dans un **BGW arbre** de loi de reproduction  $\mu$ , chaque individu a un nombre aléatoire indépendant d'enfants de loi  $\mu$ )

# Arbres planaires uniformes et ensemble grand-canonique

↗ Pour étudier un **arbre planaire** uniforme à  $n$  sommets, un point clé est qu'il peut être réalisé comme un **BGW arbre** conditionné à avoir  $n$  sommets, avec une loi de reproduction  $\mu(i) = \frac{1}{2^{i+1}}$  pour  $i \geq 0$ .

(Dans un **BGW arbre** de loi de reproduction  $\mu$ , chaque individu a un nombre aléatoire indépendant d'enfants de loi  $\mu$ )

Raison : un arbre planaire à  $n$  sommets a alors une probabilité  $2^{-2n-1}$ .

# *Arbres simplement générés*

En particulier les **arbres planaires uniformes** sont des cas particuliers d'arbres simplement générés (ou à la Boltzmann) :

# *Arbres simplement générés*

En particulier les **arbres planaires uniformes** sont des cas particuliers d'arbres simplement générés (ou à la Boltzmann) :

Étant donnée une suite  $w = (w(i); i \geq 0)$  de nombres réels positifs, à chaque arbre  $\tau$  on associe un poids  $\Omega^w(\tau)$  donné par :

$$\Omega^w(\tau) = \prod_{u \in \tau} w(\text{nombre d'enfants de } u).$$

# Arbres simplement générés

En particulier les **arbres planaires uniformes** sont des cas particuliers d'arbres simplement générés (ou à la Boltzmann) :

Étant donnée une suite  $w = (w(i); i \geq 0)$  de nombres réels positifs, à chaque arbre  $\tau$  on associe un poids  $\Omega^w(\tau)$  donné par :

$$\Omega^w(\tau) = \prod_{u \in \tau} w(\text{nombre d'enfants de } u).$$

Alors, si  $\mathbb{T}_n$  est l'ensemble des arbres à  $n$  sommets, pour tout arbre  $\tau \in \mathbb{T}_n$ , on pose

$$\mathbb{P}_n^w(\tau) = \frac{\Omega^w(\tau)}{\sum_{T \in \mathbb{T}_n} \Omega^w(T)},$$

appelée mesure de Boltzmann.



# LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES SIMPLEMENT GÉNÉRÉS



## LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES SIMPLEMENT GÉNÉRÉS



→ On voit les arbres comme des espaces métriques compacts

## LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES SIMPLEMENT GÉNÉRÉS



→ On voit les arbres comme des espaces métriques compacts, munis de la topologie de Gromov–Hausdorff.

# *Limites d'échelle d'arbres simplement générés*

→ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

# *Limites d'échelle d'arbres simplement générés*

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

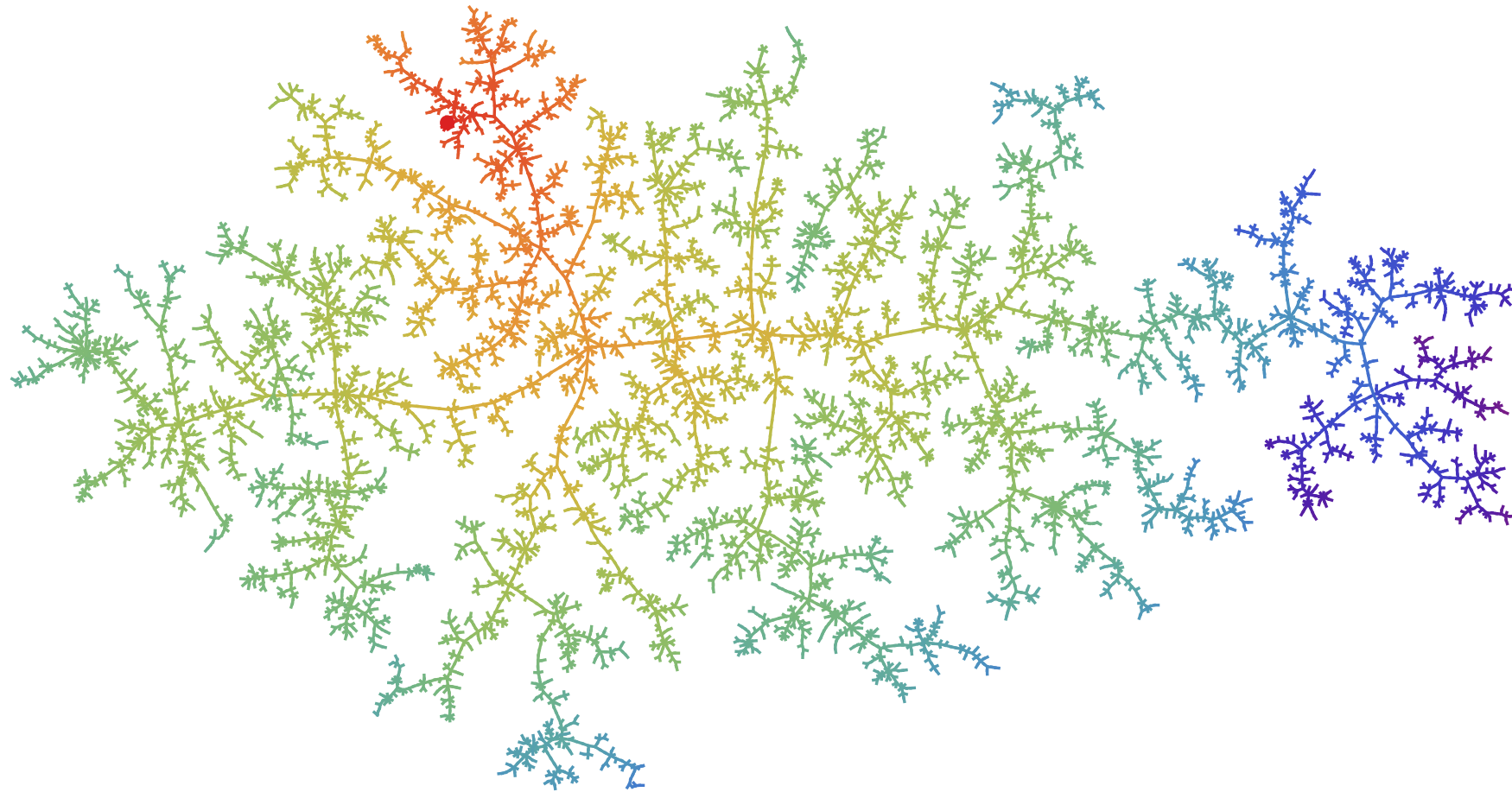


Figure – Un plongement non isométrique d'une réalisation d'une approximation de l'arbre brownien.

# *Limites d'échelle d'arbres simplement générés*

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

Théorème (Aldous '93, Duquesne & Le Gall)

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

# Limites d'échelle d'arbres simplement générés

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

## Théorème (Aldous '93, Duquesne & Le Gall)

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_2$$

# Limites d'échelle d'arbres simplement générés

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

## Théorème (Aldous '93, Duquesne & Le Gall)

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_2$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff



# Limites d'échelle d'arbres simplement générés

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

## Théorème (Aldous '93, Duquesne & Le Gall)

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_2$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_2$  est un espace métrique compact aléatoire appelé arbre brownien.

# Limites d'échelle d'arbres simplement générés

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

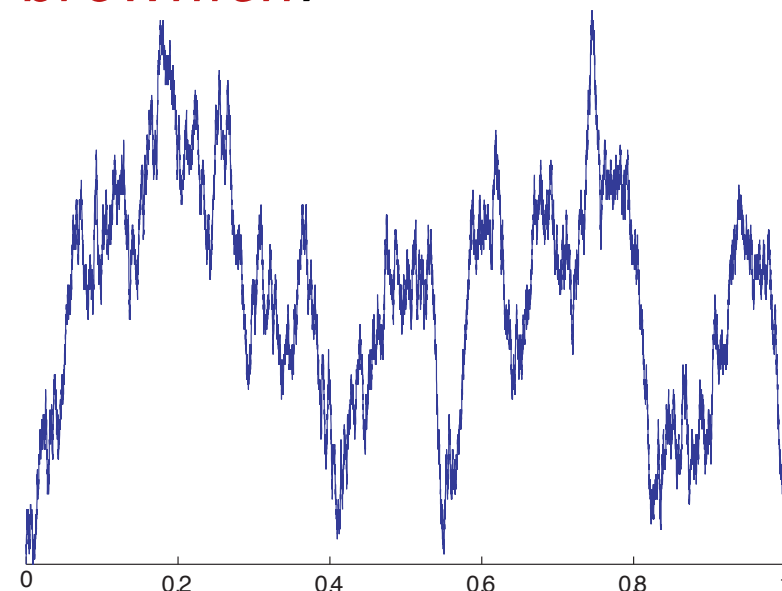
## Théorème (Aldous '93, Duquesne & Le Gall)

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_2$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_2$  est un espace métrique compact aléatoire appelé arbre brownien.

Simulation d'une excursion brownienne :



# Limites d'échelle d'arbres simplement générés

↗ Si la suite de poids est suffisamment régulière, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est l'arbre brownien.

## Théorème (Aldous '93, Duquesne & Le Gall)

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance  $\sigma^2 \in ]0, \infty[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_2$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_2$  est un espace métrique compact aléatoire appelé arbre brownien.

## Théorème (Addario-Berry, Devroye, Janson '13)

Sous les mêmes hypothèses, il existe des constantes  $a, b > 0$  telles que pour tout  $u \geq 0$  et  $n \geq 1$  on ait

$$\mathbb{P}(\text{Diam}(t_n) \geq u\sqrt{n}) \leq ae^{-bu^2}.$$

→ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

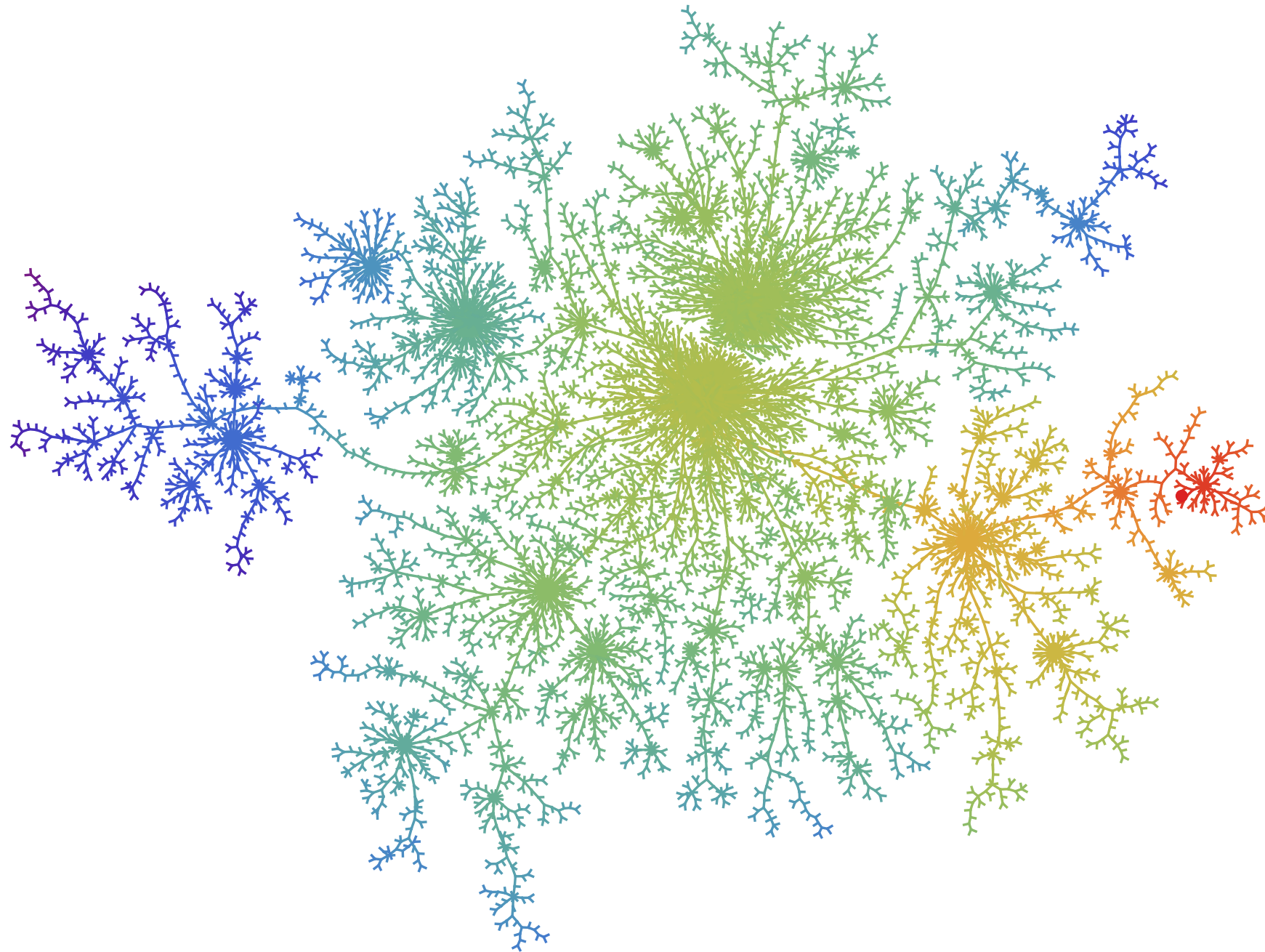


Figure – Un plongement non isométrique d'une approximation de l'arbre stable d'indice 1.2.

↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

## Théorème (Duquesne '03)

Soit  $\alpha \in (1, 2]$ . Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance infinie et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha$ .

↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

## Théorème (Duquesne '03)

Soit  $\alpha \in (1, 2]$ . Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique (càd de moyenne 1) de variance infinie et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha$  ( $\mu(i) \sim \frac{c}{i^{1+\alpha}}$ ).

↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

## Théorème (Duquesne '03)

Soit  $\alpha \in (1, 2]$ . Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique de variance infinie et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors il existe une suite  $B_n \rightarrow \infty$  (avec  $B_n \simeq n^{1/\alpha}$ ) telle que la convergence

$$\frac{B_n}{n} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

a lieu en loi au sens de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_\alpha$  est l'arbre stable d'indice  $\alpha$  (introduit par [Le Gall & Le Jan](#)).



↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

## Théorème (Duquesne '03)

Soit  $\alpha \in (1, 2]$ . Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique de variance infinie et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors il existe une suite  $B_n \rightarrow \infty$  (avec  $B_n \simeq n^{1/\alpha}$ ) telle que la convergence

$$\frac{B_n}{n} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

a lieu en loi au sens de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_\alpha$  est l'arbre stable d'indice  $\alpha$  (introduit par Le Gall & Le Jan).

## Remarque

↗ Il est possible de définir  $\mathcal{T}_\alpha$  à partir de l'excursion normalisée d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable spectralement positif.

↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

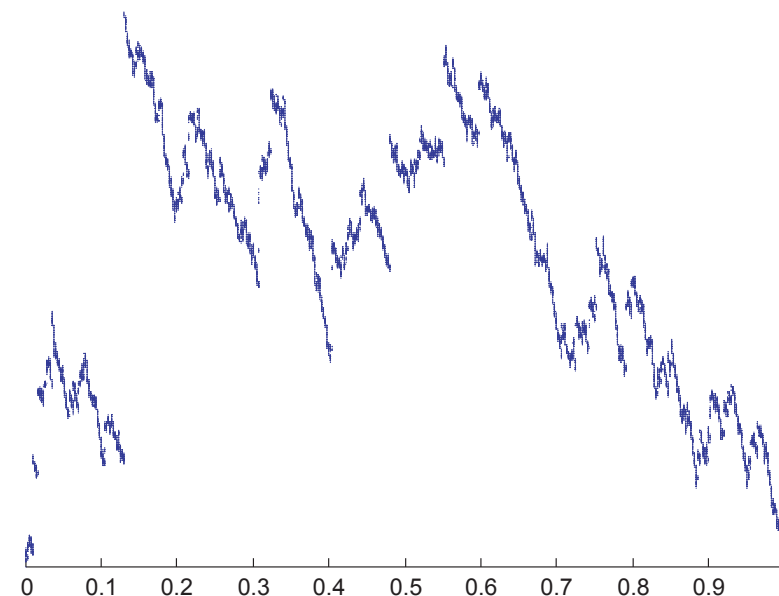
## Théorème (Duquesne '03)

Soit  $\alpha \in (1, 2]$ . Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique de variance infinie et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors il existe une suite  $B_n \rightarrow \infty$  (avec  $B_n \simeq n^{1/\alpha}$ ) telle que la convergence

$$\frac{B_n}{n} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

a lieu en loi au sens de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_\alpha$  est l'arbre stable d'indice  $\alpha$  (introduit par [Le Gall & Le Jan](#)).

Simulation d'une excursion d'un processus de Lévy stable spectralement positif :



↗ Si la suite de poids présente un comportement de queue lourde, alors la limite d'échelle des arbres simplement générés associés est un arbre stable.

## Théorème (Duquesne '03)

Soit  $\alpha \in (1, 2]$ . Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique de variance infinie et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets. Alors il existe une suite  $B_n \rightarrow \infty$  (avec  $B_n \simeq n^{1/\alpha}$ ) telle que la convergence

$$\frac{B_n}{n} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

a lieu en loi au sens de Gromov-Hausdorff, où  $\mathcal{T}_\alpha$  est l'arbre stable d'indice  $\alpha$  (introduit par [Le Gall & Le Jan](#)).

### Théorème (K.).

Sous les mêmes hypothèses, pour tout  $\delta \in ]0, \alpha[$ , il existe des constantes  $a, b > 0$  telles que pour tout  $u \geq 0$  et  $n \geq 1$  on ait

$$\mathbb{P} \left( \text{Diam}(t_n) \geq u \cdot \frac{n}{B_n} \right) \leq a e^{-b u^\delta}.$$

# ARBREBOUCLES



# *Arbraboucles discrets*

Étant donné un **arbre planaire**  $\tau$ , on définit  $\text{Loop}(\tau)$  comme le graphe obtenu à partir de  $\tau$  :

# *Arbraboucles discrets*

Étant donné un **arbre planaire**  $\tau$ , on définit  $\text{Loop}(\tau)$  comme le graphe obtenu à partir de  $\tau$  :

 en remplaçant chaque sommet  $u$  par une boucle avec  $\text{deg}(u)$  sommets,

# Arbraboucles discrets

Étant donné un **arbre planaire**  $\tau$ , on définit  $\text{Loop}(\tau)$  comme le graphe obtenu à partir de  $\tau$  :

- 👉 en remplaçant chaque sommet  $u$  par une boucle avec  $\deg(u)$  sommets,
- 👉 puis en collant ces boucles suivant la structure d'**arbre** de  $\tau$ .

# Arbraboucles discrètes

Étant donné un **arbre planaire**  $\tau$ , on définit  $\text{Loop}(\tau)$  comme le graphe obtenu à partir de  $\tau$  :

- 👉 en remplaçant chaque sommet  $u$  par une boucle avec  $\deg(u)$  sommets,
- 👉 puis en collant ces boucles suivant la structure d'**arbre** de  $\tau$ .

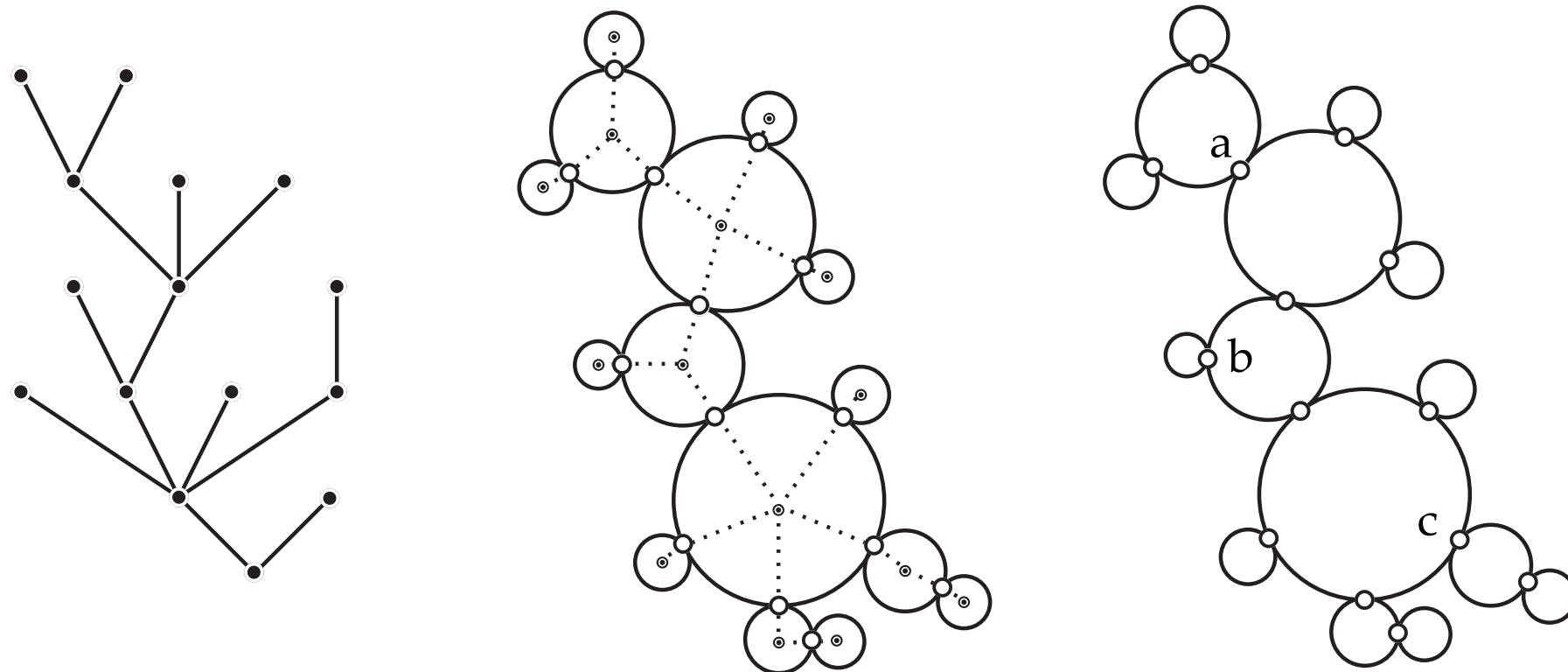


Figure – Un **arbre planaire**  $\tau$  et son arbraboucle associé  $\text{Loop}(\tau)$ .

On voit  $\text{Loop}(\tau)$  comme un espace métrique compact.

$$d(a,b)=2 \quad d(b,c)=3 \quad d(a,c)=4$$



# Arbraboucles discrètes

Étant donné un **arbre planaire**  $\tau$ , on définit  $\text{Loop}(\tau)$  comme le graphe obtenu à partir de  $\tau$  :

- 👉 en remplaçant chaque sommet  $u$  par une boucle avec  $\deg(u)$  sommets,
- 👉 puis en collant ces boucles suivant la structure d'**arbre** de  $\tau$ .

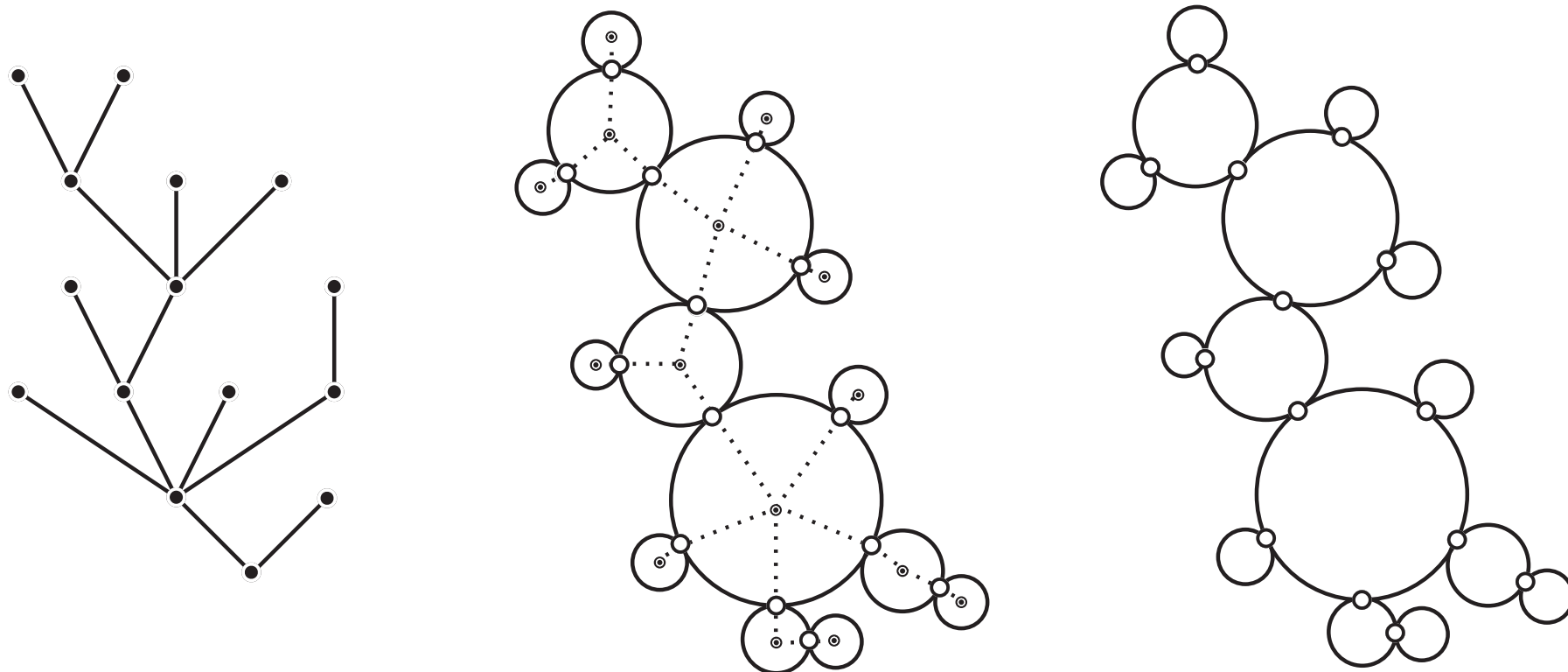


Figure – Un **arbre planaire**  $\tau$  et son arbraboucle associé  $\text{Loop}(\tau)$ .

On voit  $\text{Loop}(\tau)$  comme un espace métrique compact.

↗ Intuitivement, un **arbraboucle** code la structure géométrique des sommets à grands degrés dans un arbre.

# *Arbraboucles stables*

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ .

# *Arbraboucles stables*

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

# Arbraboucles stables

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

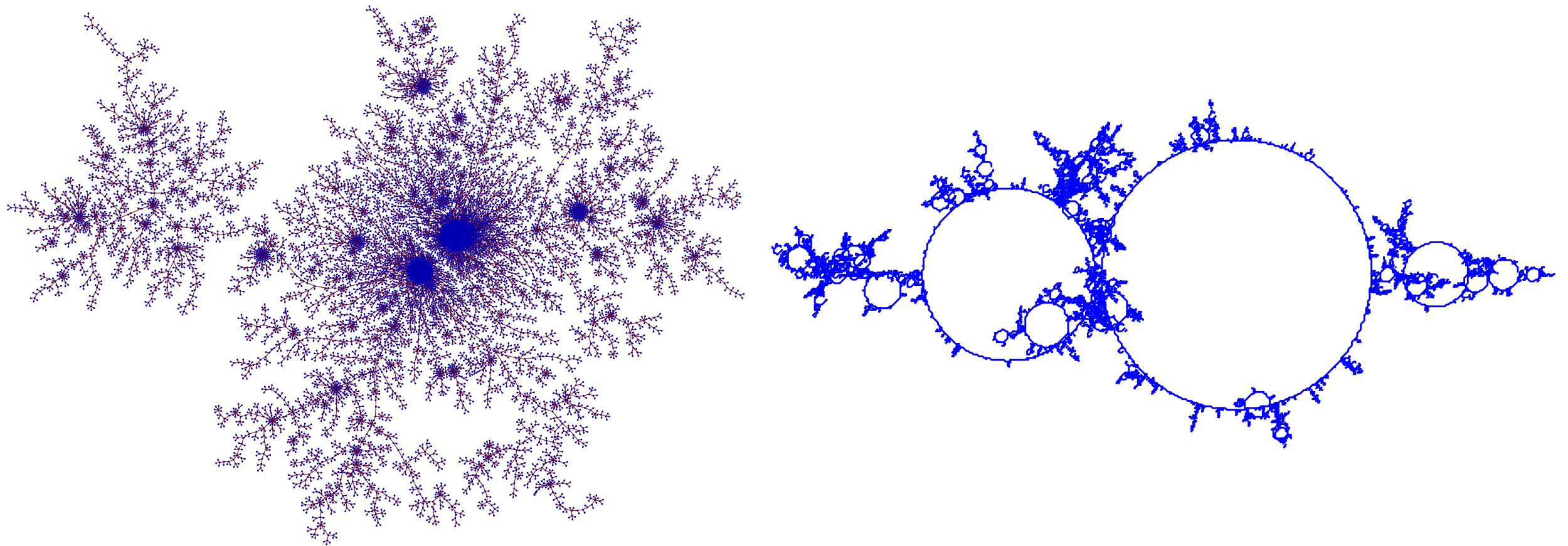


Figure –  $t_n$  et son arbraboucle associé.

# Arbraboucles stables

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  **arbre** conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}_\alpha$  tel que la convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha$$

# Arbraboucles stables

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}_\alpha$  tel que la convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

# Arbraboucles stables

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}_\alpha$  tel que la convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

## Remarque

↗ Une définition alternative de  $\mathcal{L}_\alpha$  passe par l'excursion normalisée d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable spectralement positif.

# Arbraboucles stables

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}_\alpha$  tel que la convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

## Remarque

↗ Une définition alternative de  $\mathcal{L}_\alpha$  passe par l'excursion normalisée d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable spectralement positif. En particulier, les longueurs des boucles  $\mathcal{L}_\alpha$  correspondent aux sauts de l'excursion.



# Arbraboucles stables

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\alpha \in ]1, 2[$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}_\alpha$  tel que la convergence

$$\frac{1}{B_n} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

↗ Idée : utiliser un codage de  $\text{Loop}(t_n)$  par la marche de Łukasiewicz de  $t_n$ .

# *Arbraboucles avec variance finie*

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

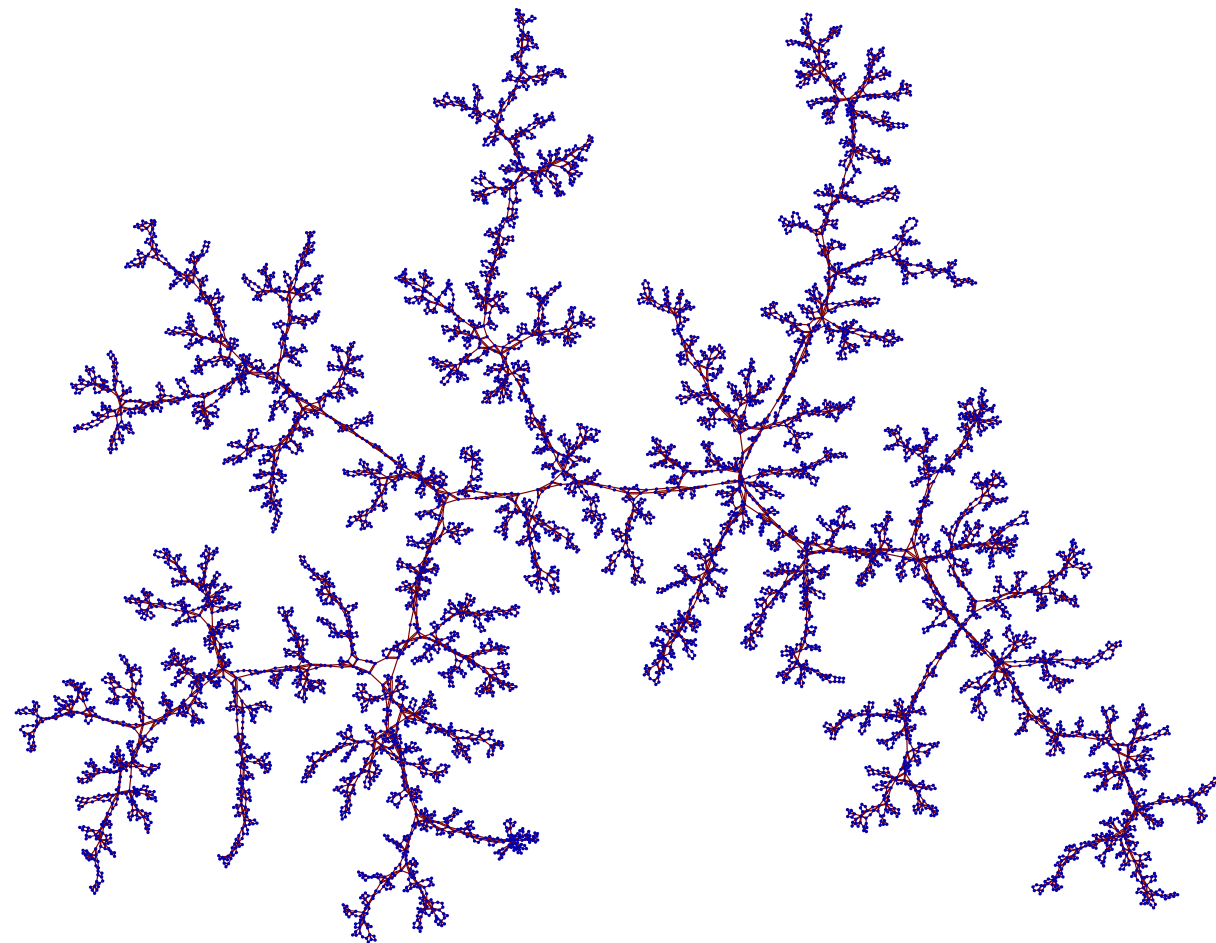


Figure – Un plongement non isométrique de  $\text{Loop}(t_n)$  pour  $n$  grand.

# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien, Haas & K.).

Il existe une constante  $c(\mu)$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_2,$$

# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien, Haas & K.).

Il existe une constante  $c(\mu)$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_2,$$

où  $\mathcal{T}_2$  est l'arbre brownien

# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien, Haas & K.).

Il existe une constante  $c(\mu)$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_2,$$

où  $\mathcal{T}_2$  est l'arbre brownien et la convergence a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien, Haas & K.).

Il existe une constante  $c(\mu)$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_2,$$

où  $\mathcal{T}_2$  est l'arbre brownien et la convergence a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

$$\text{De plus, } c(\mu) = \frac{2}{\sigma} \cdot \frac{1}{4} \left( \sigma^2 + 4 - \mu_{2\mathbb{Z}_+} \right),$$

# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $\text{BGW}_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien, Haas & K.).

Il existe une constante  $c(\mu)$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_2,$$

où  $\mathcal{T}_2$  est l'arbre brownien et la convergence a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

$$\text{De plus, } c(\mu) = \frac{2}{\sigma} \cdot \frac{1}{4} (\sigma^2 + 4 - \mu_{2\mathbb{Z}_+}),$$

où  $\mu_{2\mathbb{Z}_+} = \mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \dots$  et  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  est la variance de  $\mu$ .



# Arbraboucles avec variance finie

Soit  $\mu$  une loi de reproduction critique telle que  $\sum_{i \geq 0} e^{\lambda i} \mu(i) < \infty$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Soit  $t_n$  un  $BGW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  sommets.

## Théorème (Curien, Haas & K.).


Il existe une constante  $c(\mu)$  telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(\mu) \cdot \mathcal{T}_2,$$

où  $\mathcal{T}_2$  est l'arbre brownien et la convergence a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

$$\text{De plus, } c(\mu) = \frac{2}{\sigma} \cdot \frac{1}{4} (\sigma^2 + 4 - \mu_{2\mathbb{Z}_+}),$$

où  $\mu_{2\mathbb{Z}_+} = \mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \dots$  et  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  est la variance de  $\mu$ .

 **Idée** : le deuxième facteur de  $c(\mu)$  représente la proportion moyenne d'arêtes utilisées pour traverser une boucle.

# *Universalité de l'arbre brownien*

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

# *Universalité de l'arbre brownien*

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;

# Universalité de l'arbre brownien

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;

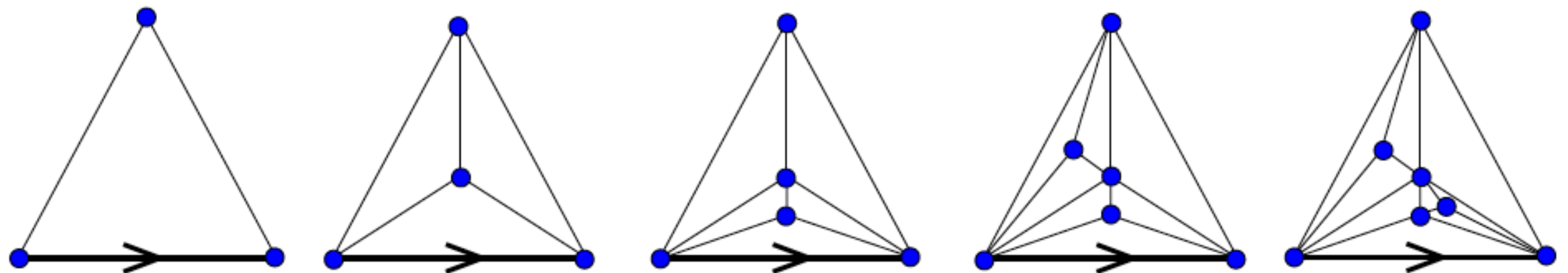


Figure – Figure tirée de Albenque & Marckert

# *Universalité de l'arbre brownien*

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ [Albenque & Marckert \('07\)](#) : [Triangulations en pile](#) uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ [Janson & Steffánsson \('12\)](#) : [Cartes aléatoires à la Boltzmann](#) avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;

# Universalité de l'arbre brownien

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ Janson & Steffánsson ('12) : **Cartes aléatoires à la Boltzmann** avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;

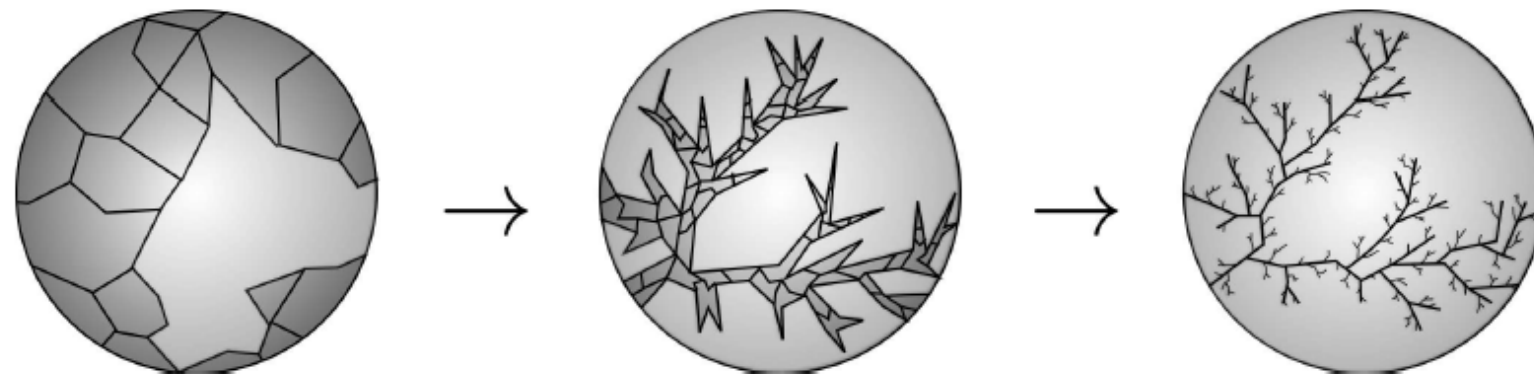


Figure – Figure tirée de Janson & Steffánsson

# *Universalité de l'arbre brownien*

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ Janson & Steffánsson ('12) : **Cartes aléatoires à la Boltzmann** avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;
- ▶ Bettinelli ('11) : **Quadrangulations uniformes à bord** avec  $n$  arêtes et un bord de périmètre  $\gg \sqrt{n}$  ;

# Universalité de l'arbre brownien

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ Janson & Steffánsson ('12) : **Cartes aléatoires à la Boltzmann** avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;
- ▶ Bettinelli ('11) : **Quadrangulations uniformes à bord** avec  $n$  arêtes et un bord de périmètre  $\gg \sqrt{n}$  ;

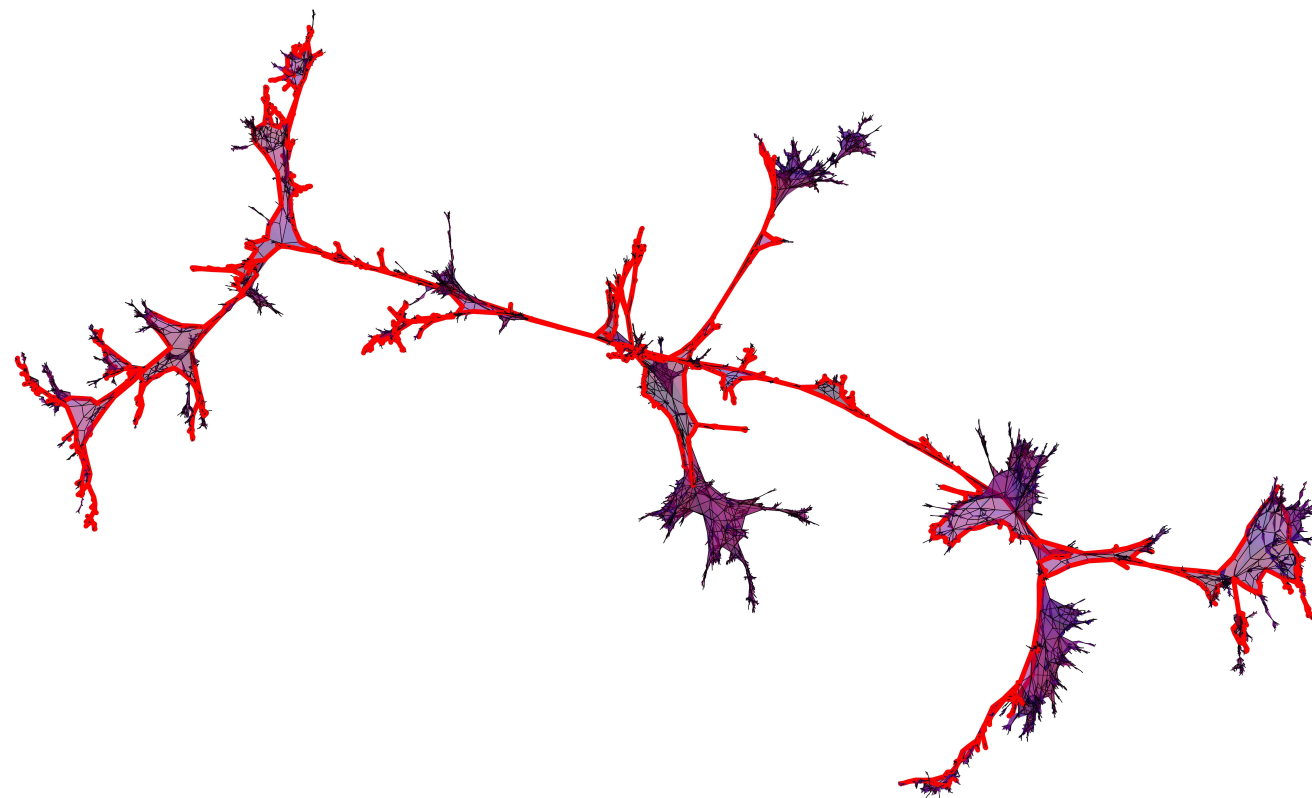


Figure – Figure de Bettinelli



# Universalité de l'arbre brownien

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ Janson & Steffánsson ('12) : **Cartes aléatoires à la Boltzmann** avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;
- ▶ Bettinelli ('11) : **Quadrangulations uniformes à bord** avec  $n$  arêtes et un bord de périmètre  $\gg \sqrt{n}$  ;
- ▶ Caraceni ('14) : **Cartes planaires extérieures** uniformes avec  $n$  sommets (extensions par Stufler '15) ;

# Universalité de l'arbre brownien

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ Janson & Steffánsson ('12) : **Cartes aléatoires à la Boltzmann** avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;
- ▶ Bettinelli ('11) : **Quadrangulations uniformes à bord** avec  $n$  arêtes et un bord de périmètre  $\gg \sqrt{n}$  ;
- ▶ Caraceni ('14) : **Cartes planaires extérieures** uniformes avec  $n$  sommets (extensions par Stufler '15) ;

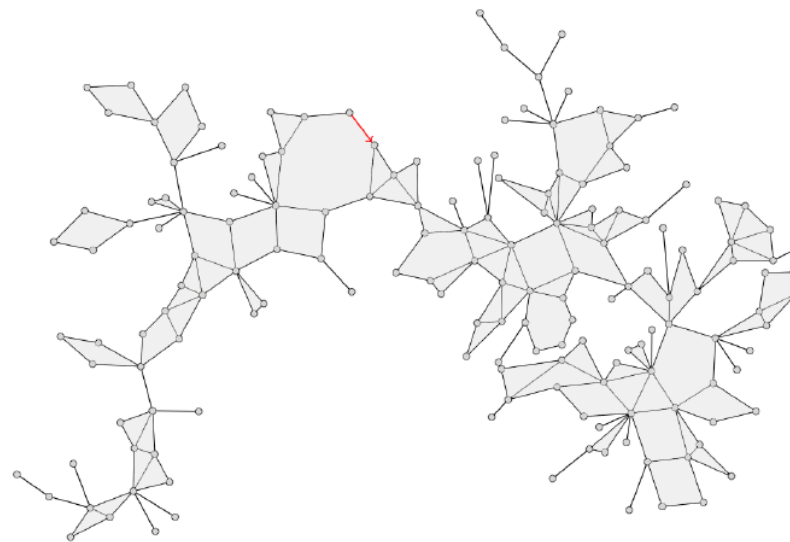


Figure – Figure tiré de Caraceni

# Universalité de l'arbre brownien

Autres graphes planaires aléatoires dont l'arbre brownien est la limite d'échelle :

- ▶ Albenque & Marckert ('07) : **Triangulations en pile** uniformes à  $2n$  faces ;
- ▶ Janson & Steffánsson ('12) : **Cartes aléatoires à la Boltzmann** avec  $n$  arêtes ayant une face de degré macroscopique ;
- ▶ Bettinelli ('11) : **Quadrangulations uniformes à bord** avec  $n$  arêtes et un bord de périmètre  $\gg \sqrt{n}$  ;
- ▶ Caraceni ('14) : **Cartes planaires extérieures** uniformes avec  $n$  sommets (extensions par Stufler '15) ;
- ▶ Panagiotou, Stufler & Weller '14 : **classe générale de graphes sous-critiques**.

# ARBREBOUCLES ET ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL



# *Arbres construits par attachement préférentiel*

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

# *Arbres construits par attachement préférentiel*

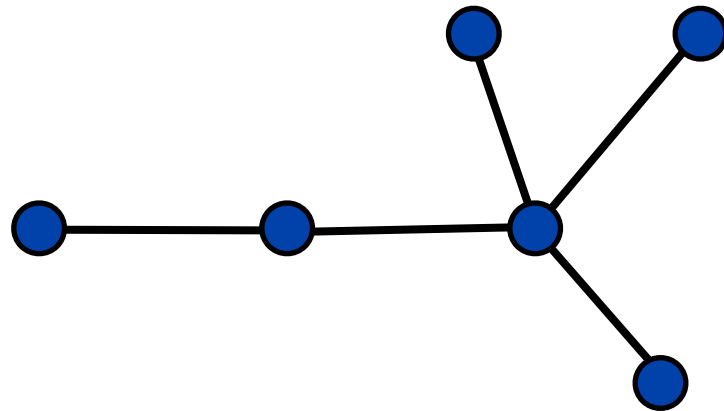
Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

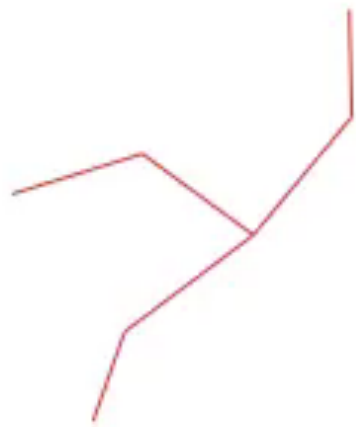
- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.



# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.

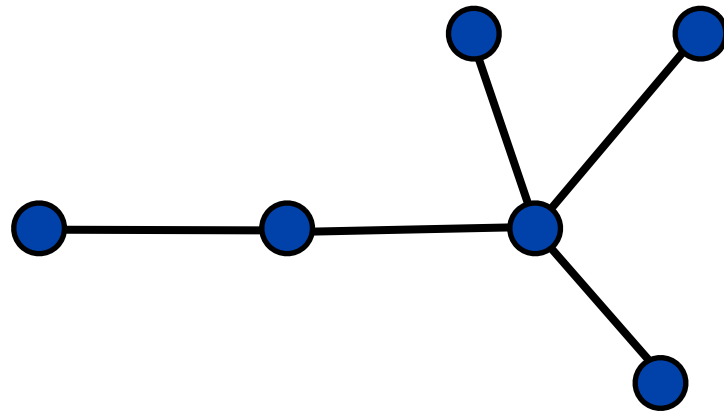




# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.

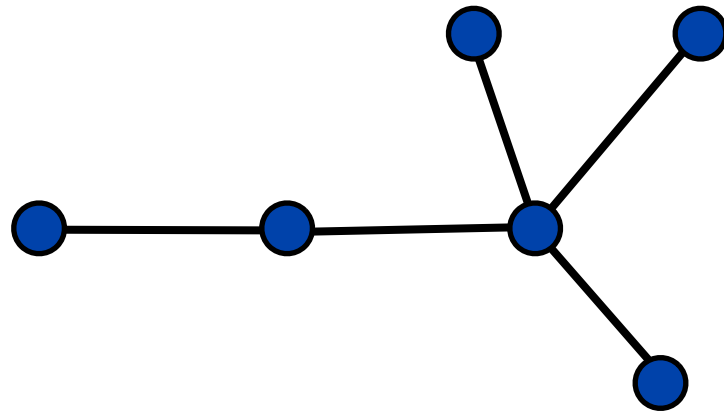


Il s'agit du modèle d'attachement préférentiel (Szymánski '87 ; Albert & Barabási '99 ; Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády '01).

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.



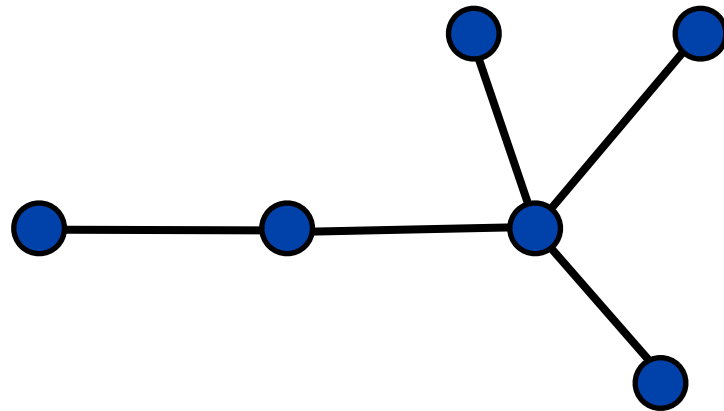
Il s'agit du modèle d'attachement préférentiel (Szymánski '87 ; Albert & Barabási '99 ; Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády '01).

→ Est-ce que la suite  $(T_n)$  admet une limite d'échelle ?

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.



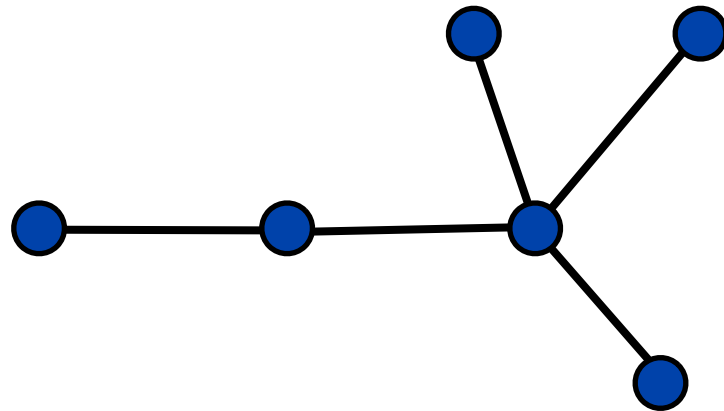
Il s'agit du modèle d'attachement préférentiel (Szymánski '87 ; Albert & Barabási '99 ; Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády '01).

→ Est-ce que la suite  $(T_n)$  admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de  $T_n$  est d'ordre  $\log(n)$  :

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.



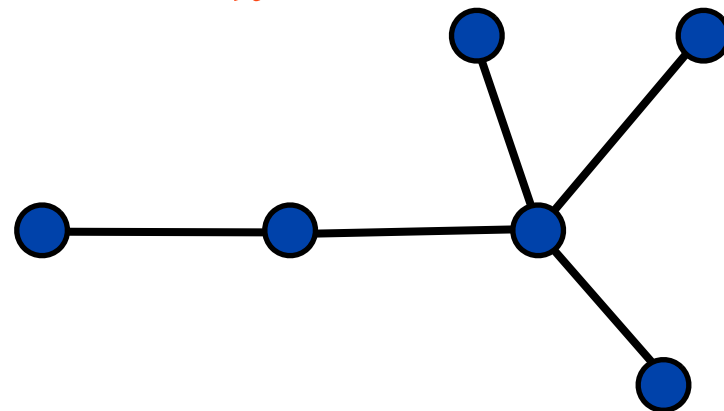
Il s'agit du modèle d'attachement préférentiel (Szymánski '87 ; Albert & Barabási '99 ; Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády '01).

↪ Est-ce que la suite  $(T_n)$  admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de  $T_n$  est d'ordre  $\log(n)$  : est-ce que  $\frac{1}{\log(n)} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact limite ?

# Arbres construits par attachement préférentiel

Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  une suite d'arbres aléatoires planaires construits récursivement comme suit :

- ▶  $T_1$  est un sommet,
- ▶ pour tout  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1}$  est obtenu à partir de  $T_n$  en ajoutant une arête à l'intérieur d'un coin de  $T_n$  choisi uniformément au hasard.



Il s'agit du modèle d'attachement préférentiel (Szymánski '87 ; Albert & Barabási '99 ; Bollobás, Riordan, Spencer & Tusnády '01).

↗ Est-ce que la suite  $(T_n)$  admet une limite d'échelle ? Il est connu que le diamètre de  $T_n$  est d'ordre  $\log(n)$  : est-ce que  $\frac{1}{\log(n)} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact limite ?

↗ Réponse : non.



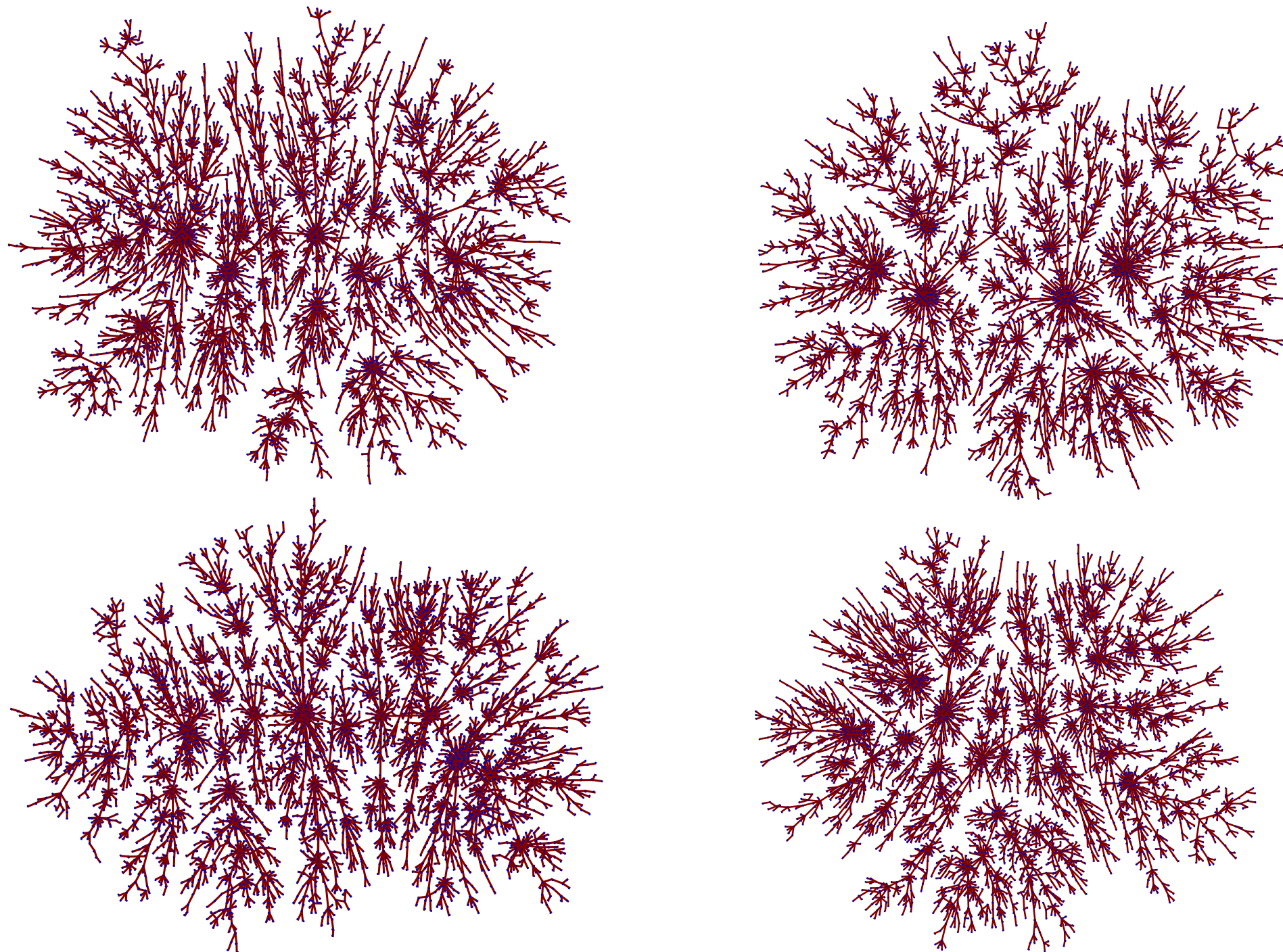


Figure – Grands arbres construits par attachement préférentiel.

# Limite d'échelles d'abraboucles

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}$  tel que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(\mathbb{T}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathcal{L},$$

a lieu presque sûrement pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

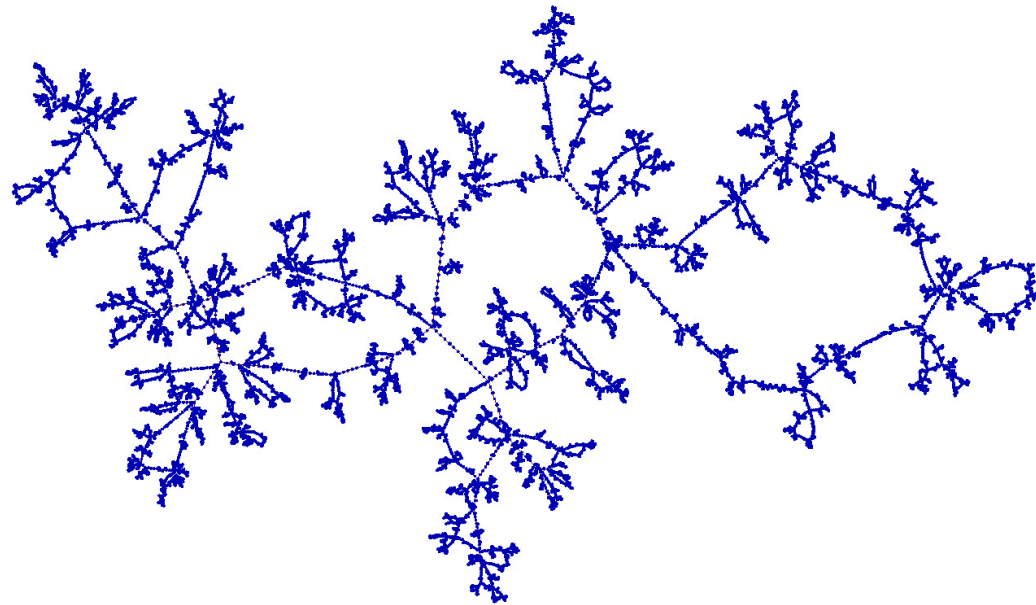
# Limite d'échelles d'abraboucles

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}$  tel que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(\mathbb{T}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathcal{L},$$

a lieu presque sûrement pour la topologie de Gromov–Hausdorff.





# Limite d'échelles d'abraboucles

**Théorème** (Curien, Duquesne, K., Manolescu).

Il existe un espace métrique compact aléatoire  $\mathcal{L}$  tel que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Loop}(\mathbb{T}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathcal{L},$$

a lieu presque sûrement pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

$\curvearrowright$  **Idée** : utiliser un couplage avec l'algorithme de Rémy (Peköz, Röllin & Ross).

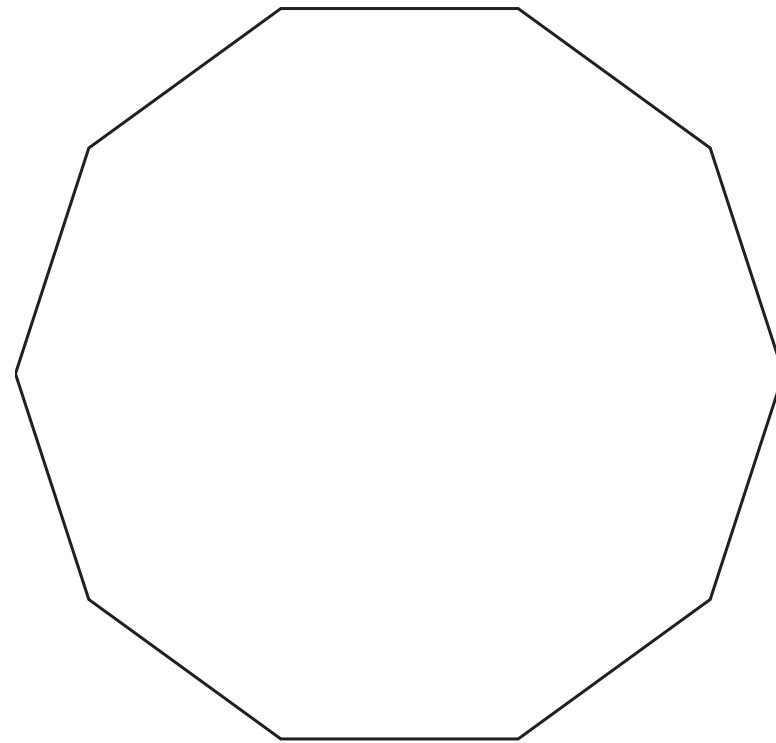
## I. ARBRES ALÉATOIRES

## II. CONFIGURATIONS PLANES NON CROISÉES

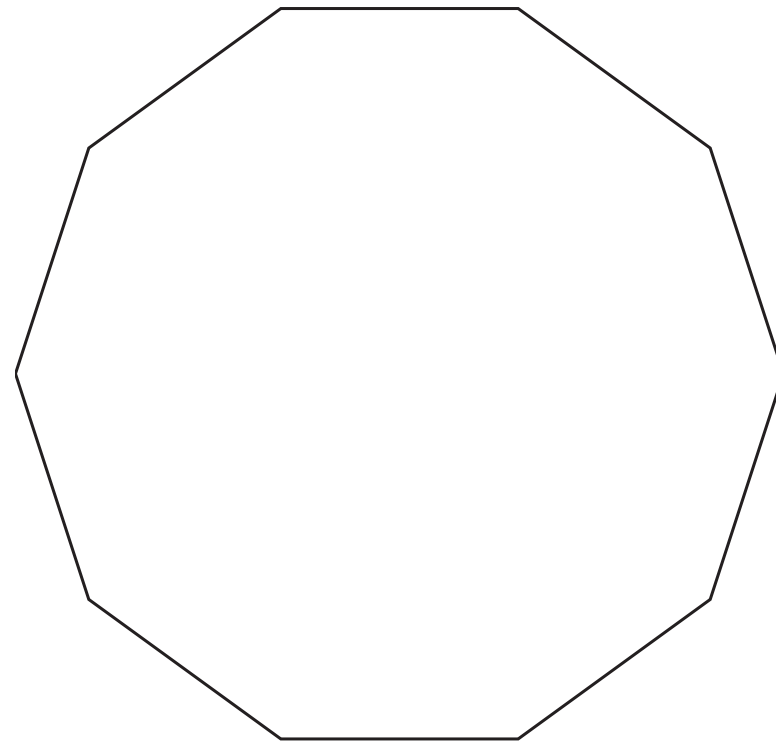


## III. CARTES ALÉATOIRES

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

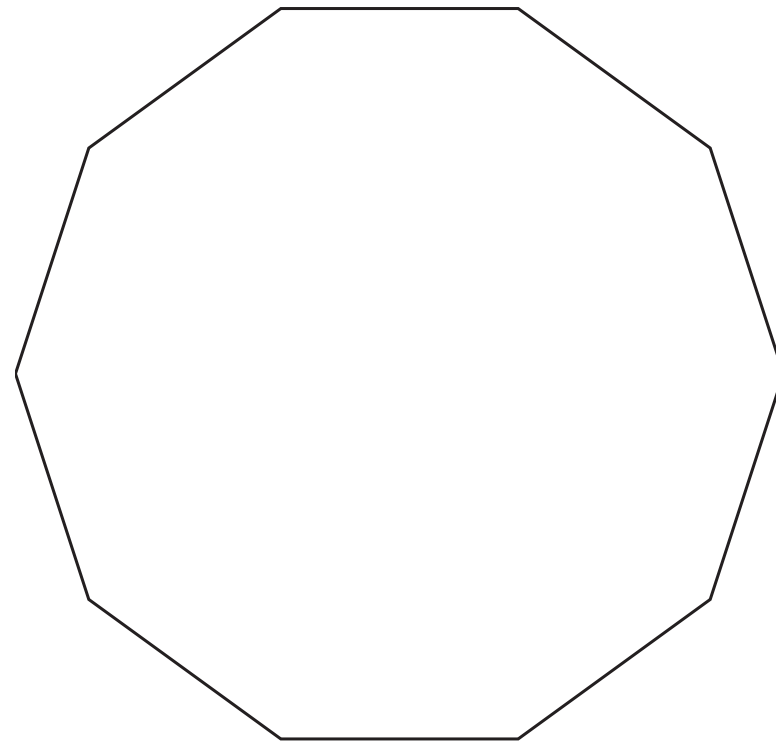


Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



*Philosophie générale* : on choisit au hasard une configuration **non croisée** obtenue à partir des sommets de  $P_n$ , c'est-à-dire un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas.

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



*Philosophie générale* : on choisit au hasard une configuration **non croisée** obtenue à partir des sommets de  $P_n$ , c'est-à-dire un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas.

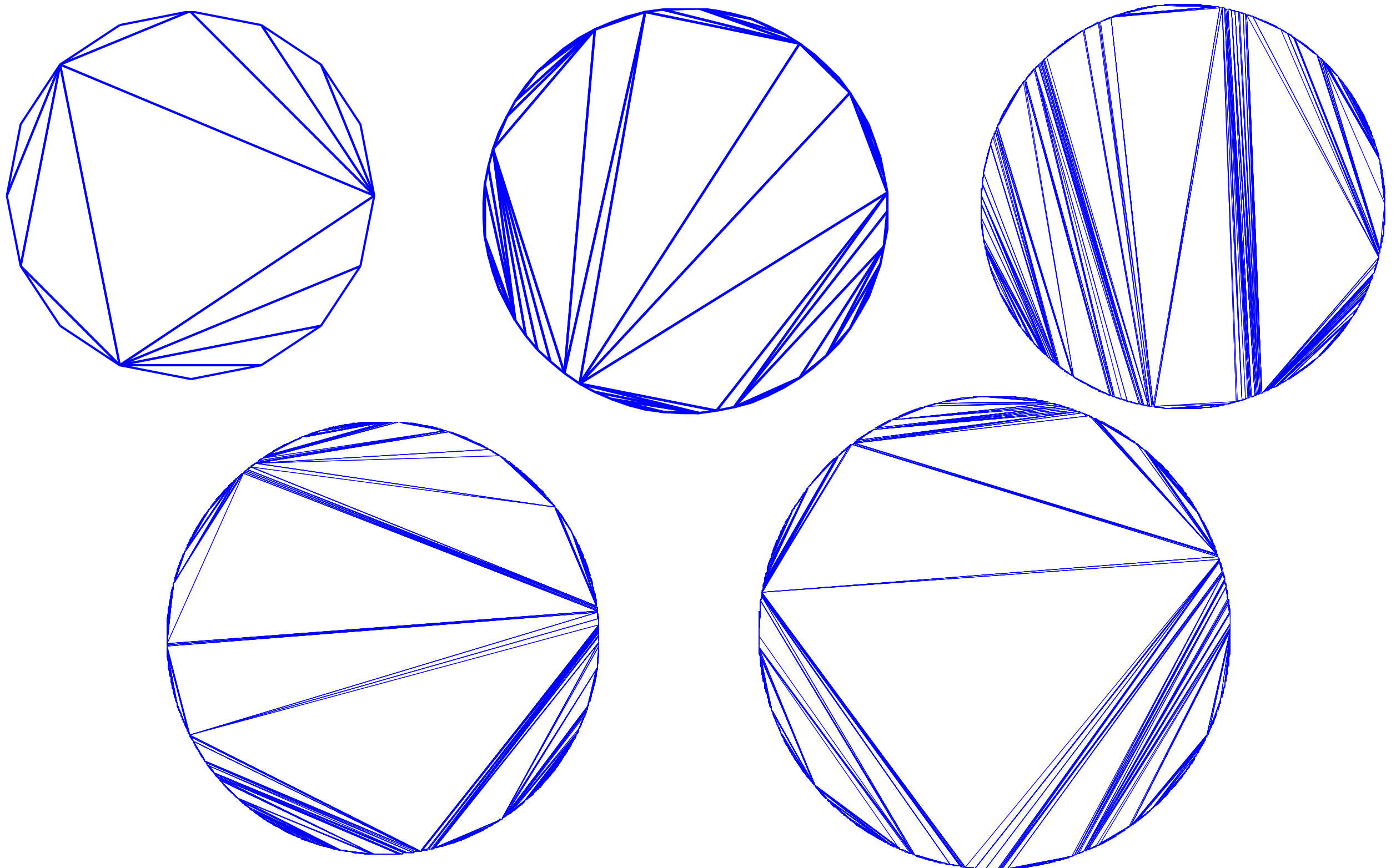
Que se passe-t-il pour  $n$  grand ?

Cas des triangulations de  $P_n$



Soit  $\mathcal{T}_n$  une triangulation aléatoire, **uniformément** distribuée parmi toutes les triangulations de  $P_n$ . À quoi ressemble  $\mathcal{T}_n$  lorsque  $n$  est très grand ?

Soit  $\mathcal{T}_n$  une triangulation aléatoire, **uniformément** distribuée parmi toutes les triangulations de  $P_n$ . À quoi ressemble  $\mathcal{T}_n$  lorsque  $n$  est très grand ?





## Théorème (Aldous '94)

Pour  $n \geq 3$ , soit  $T_n$  une triangulation *uniforme* de  $P_n$ .

## Théorème (Aldous '94)

Pour  $n \geq 3$ , soit  $T_n$  une triangulation *uniforme* de  $P_n$ . Alors il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque  $\mathbb{L}_2$  tel que la convergence

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_2,$$

## Théorème (Aldous '94)

Pour  $n \geq 3$ , soit  $T_n$  une triangulation *uniforme* de  $P_n$ . Alors il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque  $\mathbb{L}_2$  tel que la convergence

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_2,$$

a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

## Théorème (Aldous '94)

Pour  $n \geq 3$ , soit  $T_n$  une triangulation *uniforme* de  $P_n$ . Alors il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque  $\mathbb{L}_2$  tel que la convergence

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_2,$$

a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

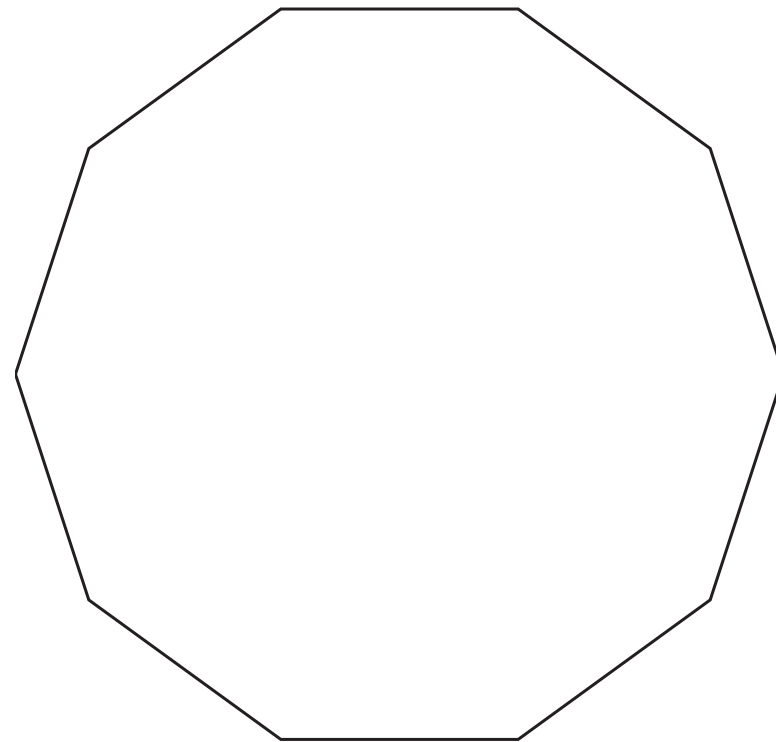
$\mathbb{L}_2$  est la **triangulation brownienne**.

## Cas des dissections de $P_n$



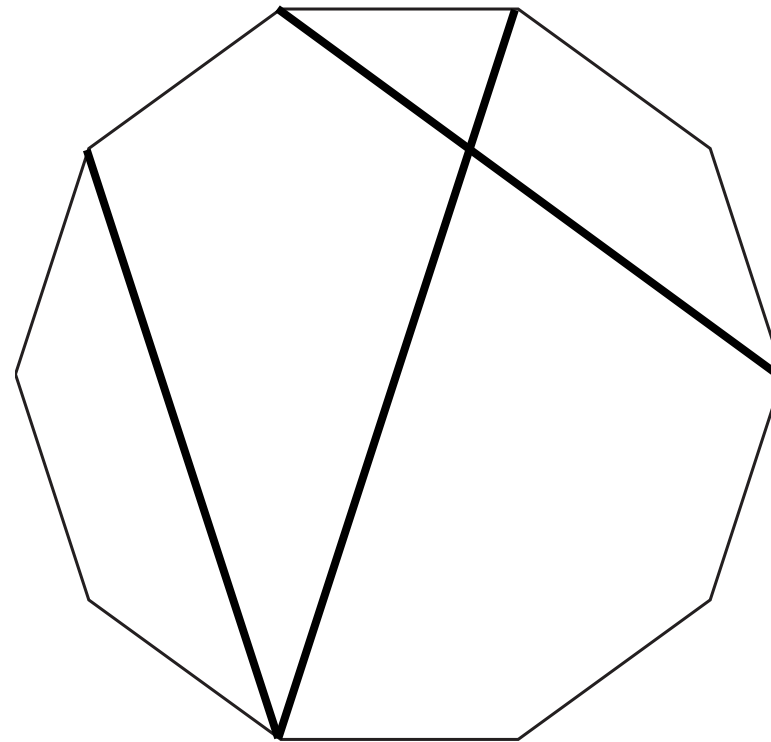
# Dissections

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



# Dissections

Soit  $P_n$  le polygône dont les sommets sont  $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$  ( $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ).



Pas une dissection !

Une dissection !

Une **dissection** de  $P_n$  est l'union des côtés de  $P_n$  et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

# *Dissections à la Boltzmann*



# Dissections à la Boltzmann

Étant donnée une suite  $w = (w(i); i \geq 3)$  de nombres réels positifs, à chaque dissection  $\mathbf{D}$  on associe un poids  $\Omega^w(\mathbf{D})$  donné par :

$$\Omega^w(\mathbf{D}) = \prod_{f \text{ face de } \mathbf{D}} w(\text{degré de } f).$$

# Dissections à la Boltzmann

Étant donnée une suite  $w = (w(i); i \geq 3)$  de nombres réels positifs, à chaque **dissection**  $\mathbf{D}$  on associe un poids  $\Omega^w(\mathbf{D})$  donné par :

$$\Omega^w(\mathbf{D}) = \prod_{f \text{ face de } \mathbf{D}} w(\text{degré de } f).$$

Alors, si  $\mathbb{D}_n$  est l'ensemble des dissections à  $n$  sommets, pour toute **dissection**  $\mathbf{D}$ , on pose

$$\mathbb{P}_n^w(\mathbf{D}) = \frac{\Omega^w(\mathbf{D})}{\sum_{d \in \mathbb{D}_n} \Omega^w(d)}.$$

# *Dissections à la Boltzmann vues comme compacts*

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

# Dissections à la Boltzmann vues comme compacts

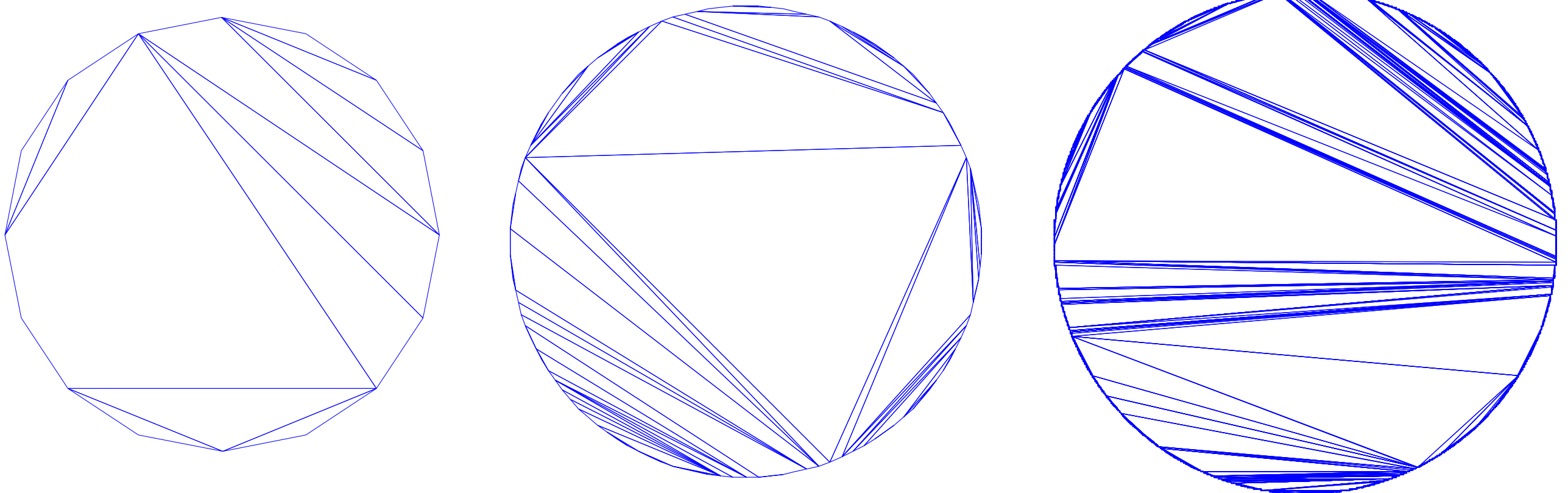
Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

$K$  (travaux de thèse) :

$\rightsquigarrow$  Si la suite de poids est **suffisamment régulière**,

$$\mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_2,$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.



# Dissections à la Boltzmann vues comme compacts

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

$K$  (travaux de thèse) :

$\rightsquigarrow$  Si la suite de poids est **suffisamment régulière**,

$$\mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_2,$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque. Ce cas inclut celui des dissections uniformes à  $n$  sommets.

# Dissections à la Boltzmann vues comme compacts

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

K (travaux de thèse) :

$\curvearrowright$  Si la suite de poids **présente un phénomène de queue lourde** d'indice  $\alpha \in (1, 2)$ , il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque  $\mathbb{L}_\alpha$  tel que

$$\mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

# Dissections à la Boltzmann vues comme compacts

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

K (travaux de thèse) :

$\curvearrowright$  Si la suite de poids **présente un phénomène de queue lourde** d'indice  $\alpha \in (1, 2)$ , il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque  $\mathbb{L}_\alpha$  tel que

$$\mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

$\mathbb{L}_\alpha$  est la lamination  $\alpha$ -stable du disque.

# Dissections à la Boltzmann vues comme compacts

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

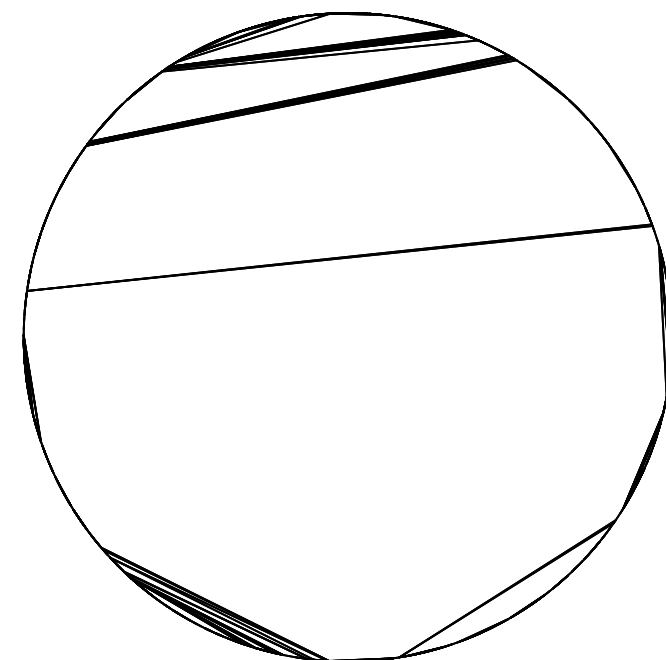
$K$  (travaux de thèse) :

$\rightsquigarrow$  Si la suite de poids **présente un phénomène de queue lourde** d'indice  $\alpha \in (1, 2)$ , il existe un sous-ensemble compact aléatoire du disque  $\mathbb{L}_\alpha$  tel que

$$\mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{L}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

$\mathbb{L}_\alpha$  est la lamination  $\alpha$ -stable du disque.





## Dissections vues comme espaces métriques compacts



# *Dissections à la Boltzmann comme espaces métriques*

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13).

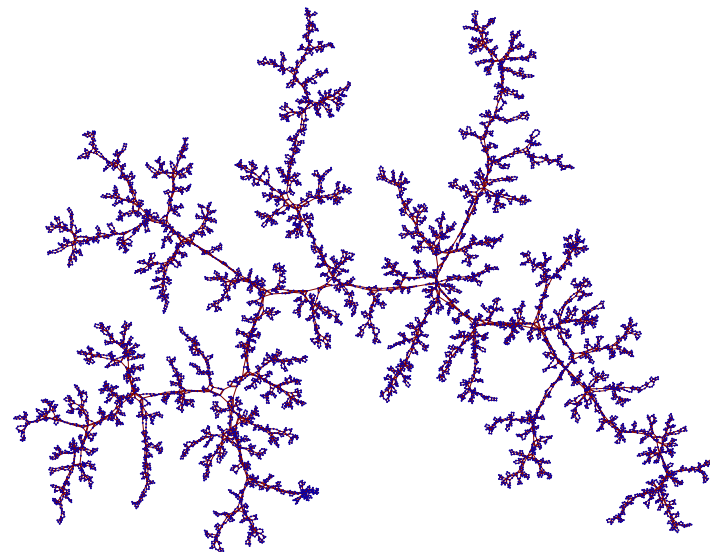
Si la suite de poids est suffisamment régulière,

# Dissections à la Boltzmann comme espaces métriques

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13).

Si la suite de poids est suffisamment régulière,



# Dissections à la Boltzmann comme espaces métriques

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13).

Si la suite de poids est suffisamment régulière, il existe une constante  $c(w)$  telle que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(w) \cdot \mathcal{T}_2,$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

# Dissections à la Boltzmann comme espaces métriques

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13).

Si la suite de poids est suffisamment régulière, il existe une constante  $c(w)$  telle que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(w) \cdot \mathcal{T}_2,$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

↪ Cas particulier : pour  $n \geq 3$ , soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection **uniforme** de  $P_n$ . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \frac{1}{7} (3 + \sqrt{2}) 2^{3/4} \cdot \mathcal{T}_2.$$

# Dissections à la Boltzmann comme espaces métriques

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13).

Si la suite de poids est suffisamment régulière, il existe une constante  $c(w)$  telle que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(w) \cdot \mathcal{T}_2,$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

↗ **Idée** : comparer les distances entre  $\mathcal{D}_n$  et son arbre dual.

# Dissections à la Boltzmann comme espaces métriques

Soit  $\mathcal{D}_n$  une dissection aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n^w$ .

**Théorème** (Curien, Haas & K. '13).

Si la suite de poids est suffisamment régulière, il existe une constante  $c(w)$  telle que la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} c(w) \cdot \mathcal{T}_2,$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

**Théorème** (Curien & K. '13).

Si la suite de poids présente un phénomène de queue lourde d'indice  $\alpha \in (1, 2)$ , il existe une suite  $B_n \simeq n^{1/\alpha} \rightarrow \infty$  telle que

$$\frac{1}{B_n} \cdot \mathcal{D}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha$$

où la convergence a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

## Autres configurations planes non croisées





# *Partitions non croisées vues comme compacts*

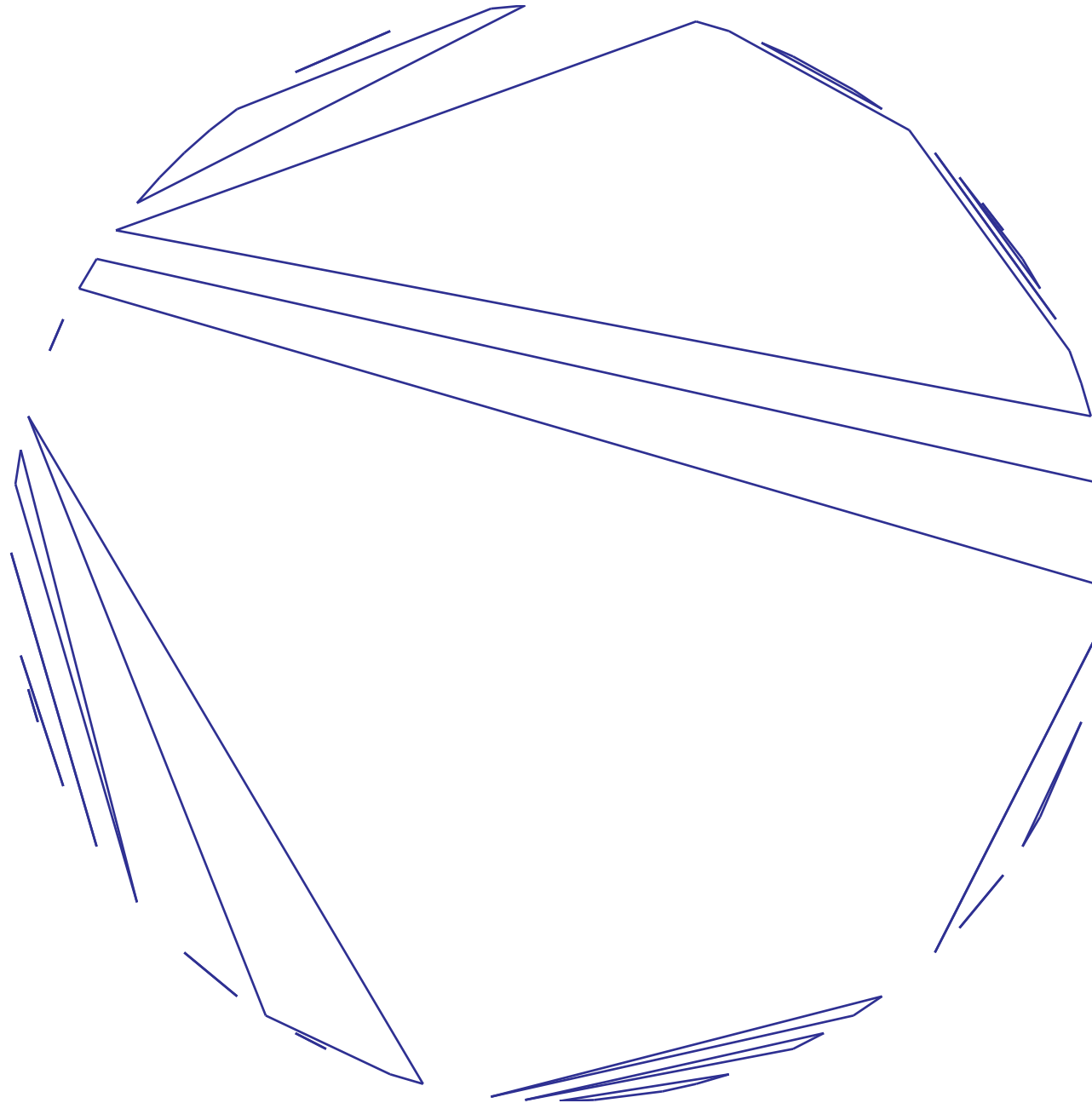


Figure – Une partition non croisée de  $P_{100}$ .

# *Partitions non croisées vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

↗ Les **partitions non croisées uniformes** convergent en loi vers la triangulation brownienne.

# *Partitions non croisées vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

 Les **partitions non croisées uniformes** convergent en loi vers la triangulation brownienne.

K & Marzouk : extension au cas des modèles de Boltzmann.

# *Partitions non croisées vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

↗ Les **partitions non croisées uniformes** convergent en loi vers la triangulation brownienne.

K & Marzouk : extension au cas des modèles de Boltzmann.

👉 Si la suite de poids est suffisamment régulière, les **partitions non croisées à la Boltzmann** convergent en loi vers la **triangulation brownienne**.

# *Partitions non croisées vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

↗ Les **partitions non croisées uniformes** convergent en loi vers la triangulation brownienne.

K & Marzouk : extension au cas des modèles de Boltzmann.

☞ Si la suite de poids est suffisamment régulière, les **partitions non croisées à la Boltzmann** convergent en loi vers la **triangulation brownienne**.

☞ Si la suite de poids présente un phénomène de queue lourde, les **partitions non croisées à la Boltzmann** convergent en loi vers une **lamination stable**.

# *Partitions non croisées vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

↗ Les **partitions non croisées uniformes** convergent en loi vers la triangulation brownienne.

K & Marzouk : extension au cas des modèles de Boltzmann.

☞ Si la suite de poids est suffisamment régulière, les **partitions non croisées à la Boltzmann** convergent en loi vers la **triangulation brownienne**.

☞ Si la suite de poids présente un phénomène de queue lourde, les **partitions non croisées à la Boltzmann** convergent en loi vers une **lamination stable**.

↗ L'outil est un codage par un arbre BGW à deux types, et ce modèle a des liens avec les probabilités non commutatives.

# *Arbres non croisés vus comme compacts*

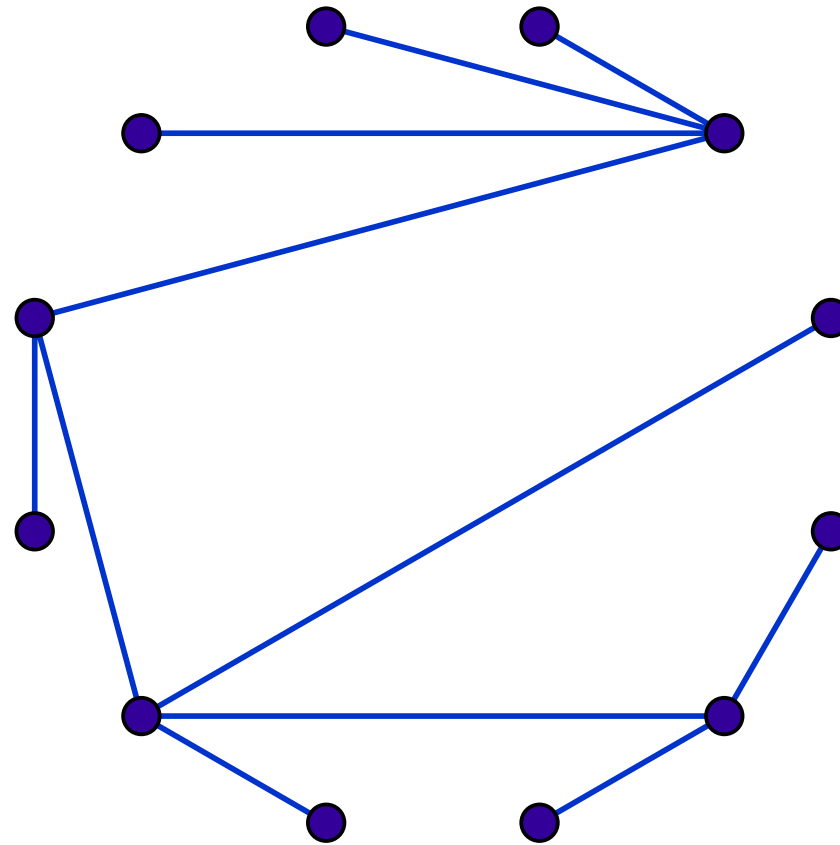


Figure – Un arbre non croisé

# *Arbres non croisés vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

→ Les arbres non croisés uniformes convergent en loi vers la triangulation brownienne.



# *Arbres non croisés vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

 Les arbres non croisés uniformes convergent en loi vers la triangulation brownienne.

K & Marzouk : extension au cas des modèles à la Boltzmann.

# *Arbres non croisés vues comme compacts*

Curien & K (travaux de thèse) :

↗ Les **arbres non croisés uniformes** convergent en loi vers la **triangulation brownienne**.

K & Marzouk : extension au cas des modèles à la Boltzmann.

☞ Si la suite de poids est suffisamment régulière, les **arbres non croisés** à la Boltzmann convergent en loi vers la **triangulation brownienne**.

# Arbres non croisés vues comme compacts

Curien & K (travaux de thèse) :

↗ Les arbres non croisés uniformes convergent en loi vers la triangulation brownienne.

K & Marzouk : extension au cas des modèles à la Boltzmann.

☞ Si la suite de poids est suffisamment régulière, les arbres non croisés à la Boltzmann convergent en loi vers la triangulation brownienne.

☞ Si la suite de poids présente un phénomène de queue lourde, les arbres non croisés à la Boltzmann convergent en loi vers une autre triangulation, obtenue à partir d'une lamination stable en « triangulant uniformant » ses faces.

# *Arbres non croisés vus comme compacts*

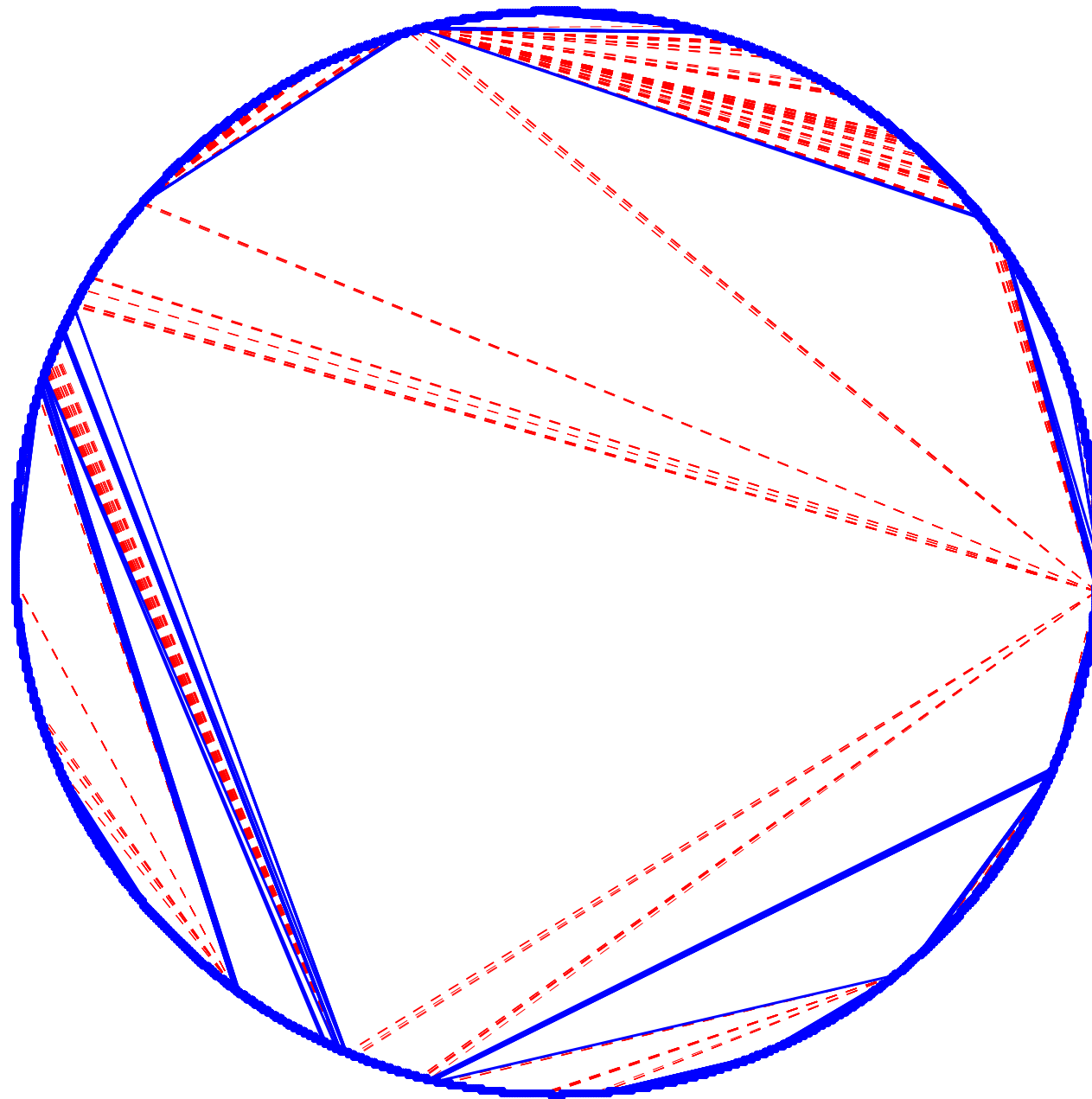


Figure – Une lamination stable avec ses faces « triangulées uniformément ».

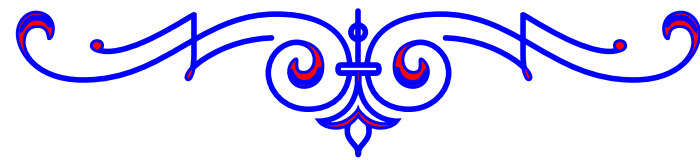
## I. ARBRES ALÉATOIRES

## II. CONFIGURATIONS PLANES NON CROISÉES

## III. CARTES ALÉATOIRES



# MOTIVATION



# *Motivation*

À quoi ressemble une **surface aléatoire** typique ?

→ **Idée** : construire une **surface aléatoire** comme limite d'échelle de **surfaces discrètes aléatoires**.

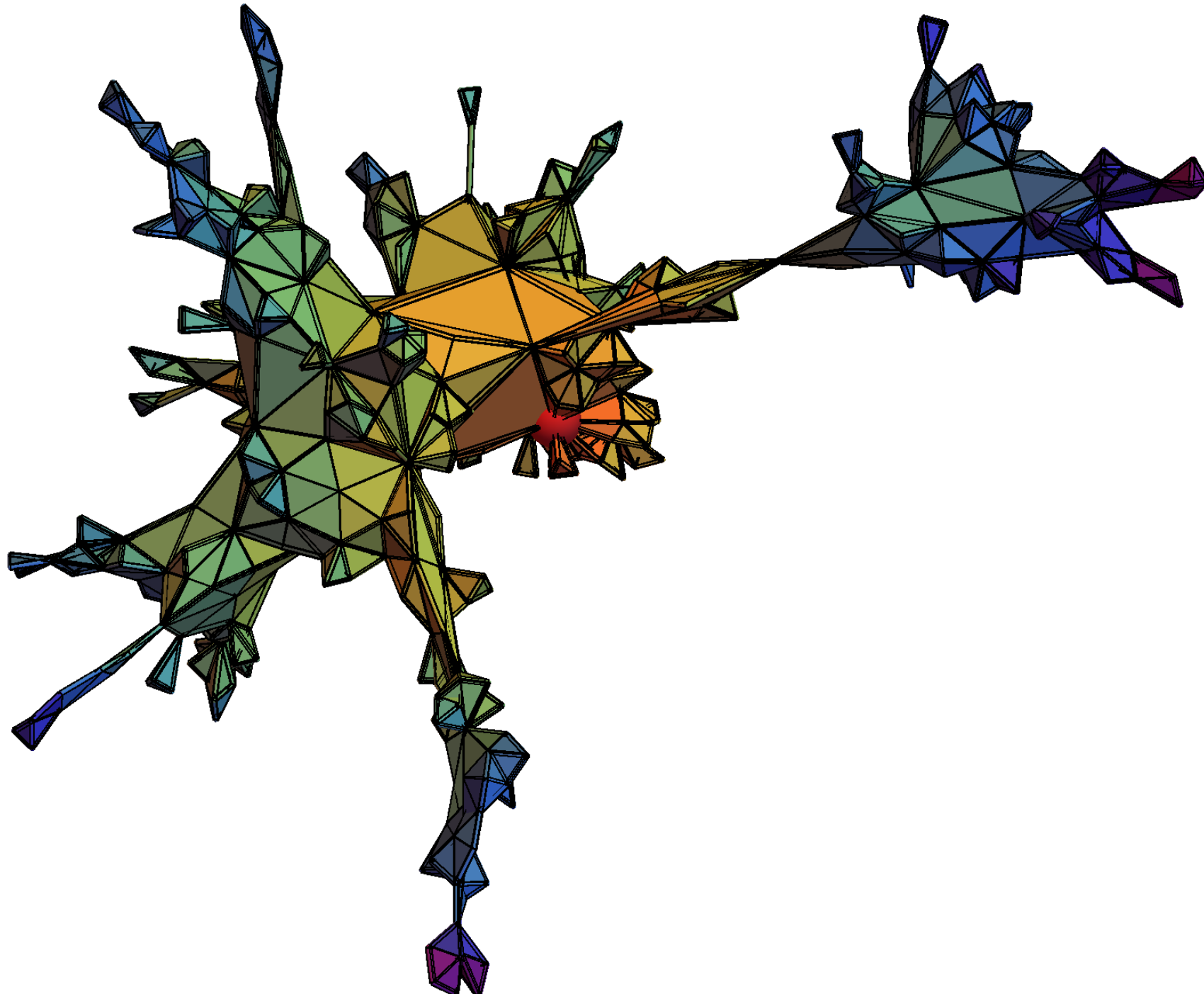


→ **Idée** : construire une **surface aléatoire** comme limite d'échelle de **surfaces discrètes aléatoires**.

On considère  $n$  **triangles**, qu'on colle ensemble pour obtenir une surface homéomorphe à une **sphère**.

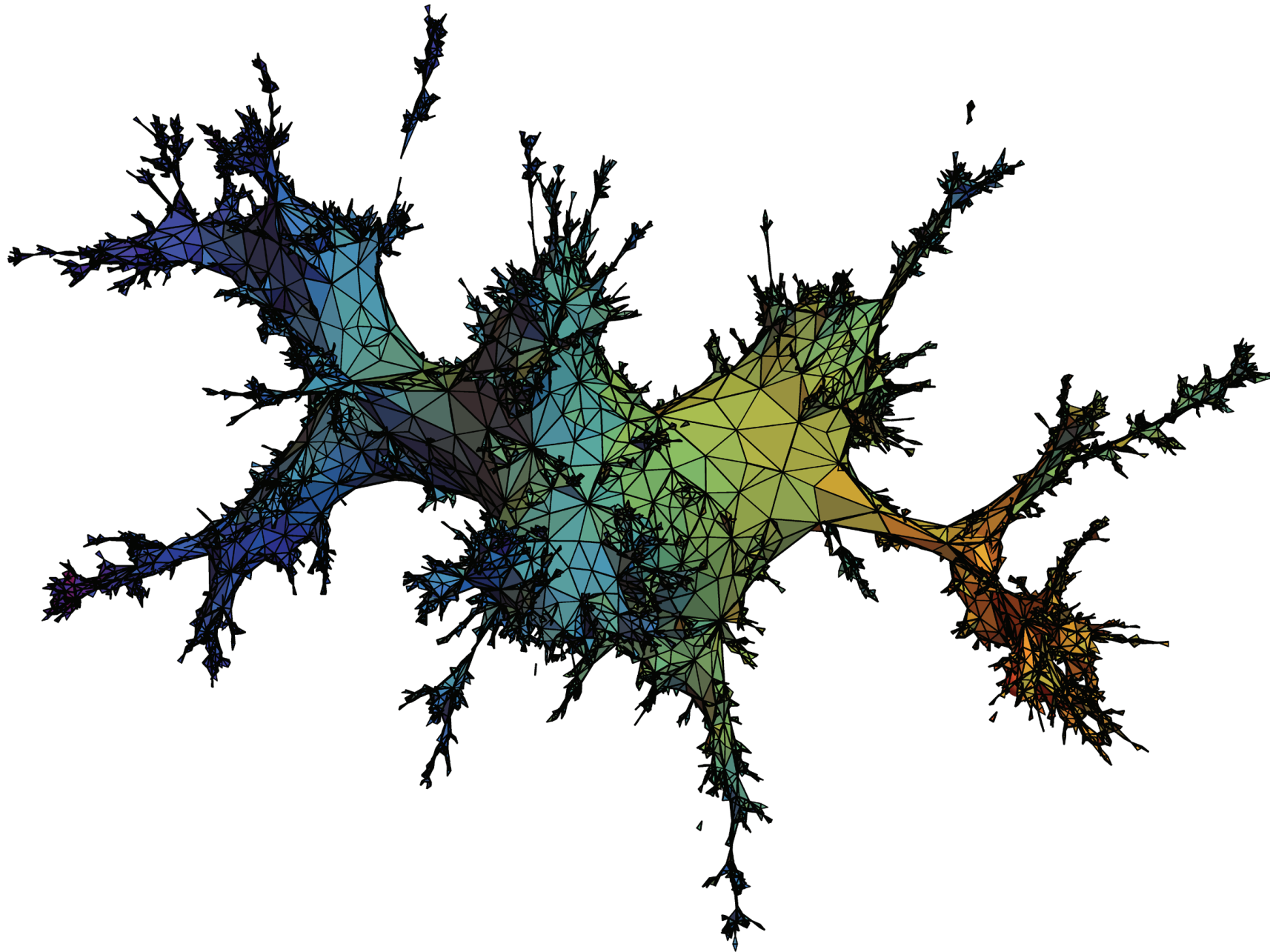
→ **Idée** : construire une **surface aléatoire** comme limite d'échelle de **surfaces discrètes aléatoires**.

On considère  $n$  **triangles**, qu'on colle ensemble pour obtenir une surface homéomorphe à une **sphère**.



→ **Idée** : construire une **surface aléatoire** comme limite d'échelle de **surfaces discrètes aléatoires**.

On considère  $n$  **triangles**, qu'on colle ensemble pour obtenir une surface homéomorphe à une **sphère**.



# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une triangulation aléatoire uniforme de la sphère avec  $n$  triangles.

# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une triangulation aléatoire uniforme de la sphère avec  $n$  triangles. On voit  $T_n$  comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe.

# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une triangulation aléatoire uniforme de la sphère avec  $n$  triangles. On voit  $T_n$  comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que  $n^{-1/4} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact aléatoire homéomorphe à la sphère (la carte brownienne)

# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une triangulation aléatoire uniforme de la sphère avec  $n$  triangles. On voit  $T_n$  comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que  $n^{-1/4} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact aléatoire homéomorphe à la sphère (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une triangulation aléatoire uniforme de la sphère avec  $n$  triangles. On voit  $T_n$  comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que  $n^{-1/4} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact aléatoire homéomorphe à la sphère (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

Résolu par **Le Gall** (ainsi que pour d'autres familles de cartes incluant les quadrangulations) en 2011, et indépendamment par **Miermont** en 2011 pour les quadrangulations.



# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une triangulation aléatoire uniforme de la sphère avec  $n$  triangles. On voit  $T_n$  comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que  $n^{-1/4} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact aléatoire homéomorphe à la sphère (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

Résolu par **Le Gall** (ainsi que pour d'autres familles de cartes incluant les quadrangulations) en 2011, et indépendamment par **Miermont** en 2011 pour les quadrangulations.

Depuis, la convergence vers la **carte brownienne** a été établie pour beaucoup d'autres différents modèles de cartes aléatoires (**Beltran & Le Gall**, **Addario-Berry & Albenque**, **Bettinelli**, **Bettinelli & Jacob** & **Miermont**, **Abraham**, **Bettinelli & Miermont**, **Baur & Miermont** & **Ray**)

# *La carte brownienne*

**Problème** (Schramm, ICM '06) : Soit  $T_n$  une **triangulation aléatoire uniforme** de la sphère avec  $n$  triangles. On voit  $T_n$  comme un espace métrique compact, en équipant ses sommets de la distance de graphe. Montrer que  $n^{-1/4} \cdot T_n$  converge vers un espace métrique compact aléatoire homéomorphe à la sphère (**la carte brownienne**), en loi pour la topologie de **Gromov–Hausdorff**.

Résolu par **Le Gall** (ainsi que pour d'autres familles de cartes incluant les quadrangulations) en 2011, et indépendamment par **Miermont** en 2011 pour les quadrangulations.

Depuis, la convergence vers la **carte brownienne** a été établie pour beaucoup d'autres différents modèles de cartes aléatoires (**Beltran & Le Gall**, **Addario-Berry & Albenque**, **Bettinelli**, **Bettinelli & Jacob** & **Miermont**, **Abraham**, **Bettinelli & Miermont**, **Baur & Miermont & Ray**), en utilisant diverses techniques, comme des bijections avec des arbres étiquetés (**Cori–Vauquelin–Schaeffer**, **Bouttier–Di Francesco–Guitter**).

## ↗ Autre motivations :

- liens avec la gravité de Liouville quantique 2D ([David](#), [Duplantier](#), [Garban](#), [Kupianen](#), [Maillard](#), [Miller](#), [Rhodes](#), [Sheffield](#), [Vargas](#), [Zeitouni](#)).
- étude de cartes aléatoires décorées par des modèles de physique statistique ([Angel](#), [Berestycki](#), [Borot](#), [Bouttier](#), [Guitter](#), [Chen](#), [Curien](#), [Gwynne](#), [K.](#), [Kassel](#), [Laslier](#), [Mao](#), [Ray](#), [Richier](#), [Sheffield](#), [Sun](#), [Wilson](#)).

# TRIANGULATIONS



# Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe proprement plongé dans la sphère (considéré aux déformations continues préservant l'orientation près).

# Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe proprement plongé dans la sphère (considéré aux déformations continues préservant l'orientation près).

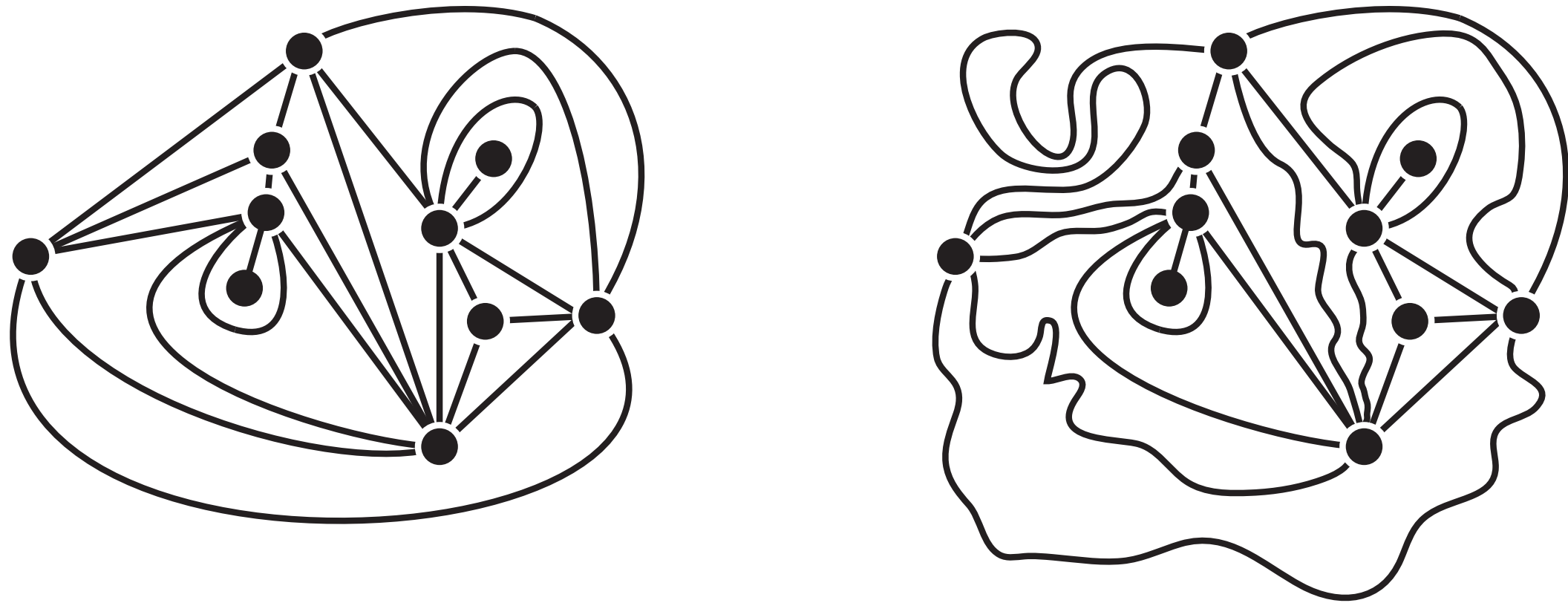


Figure – Deux cartes identiques.

# Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe proprement plongé dans la sphère (considéré aux déformations continues préservant l'orientation près). Une carte est une **triangulation** lorsque toutes ses faces sont des triangles.

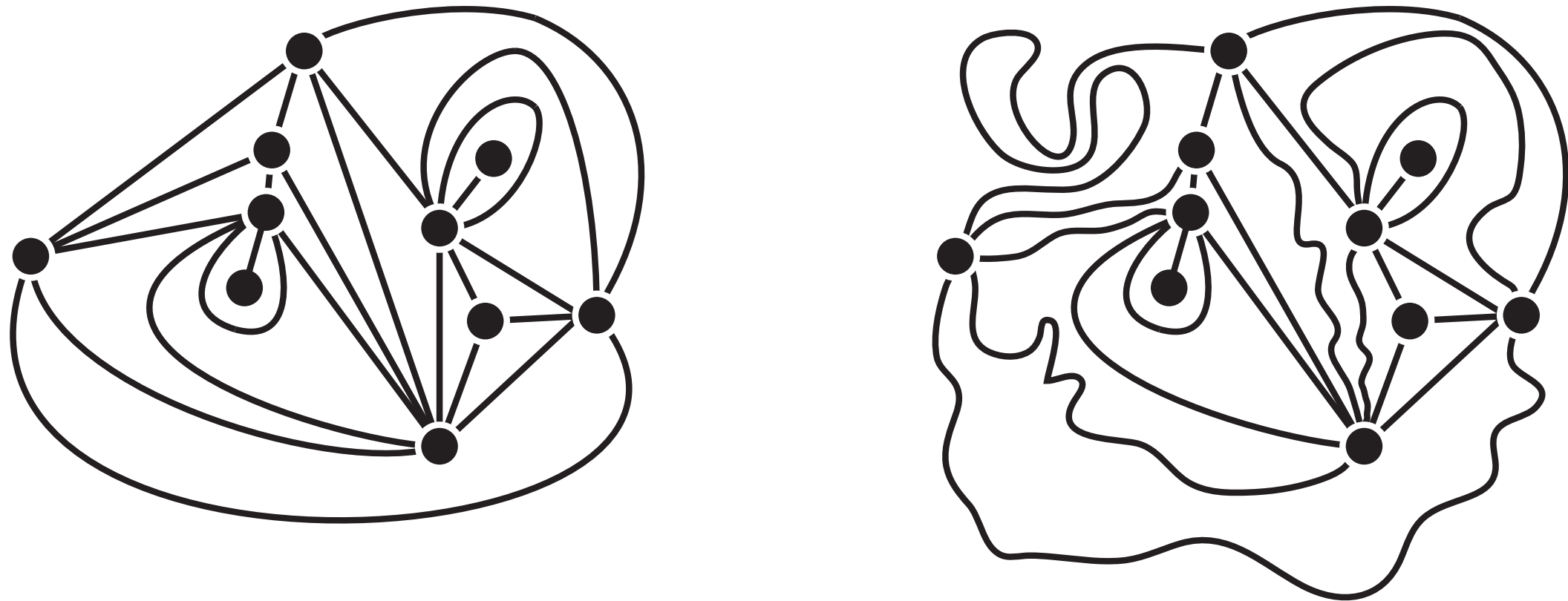


Figure – Deux triangulations identiques.

# Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe proprement plongé dans la sphère (considéré aux déformations continues préservant l'orientation près). Une carte est une **triangulation** lorsque toutes ses faces sont des triangles. Une carte est **enracinée** quand une arête orientée est distinguée.

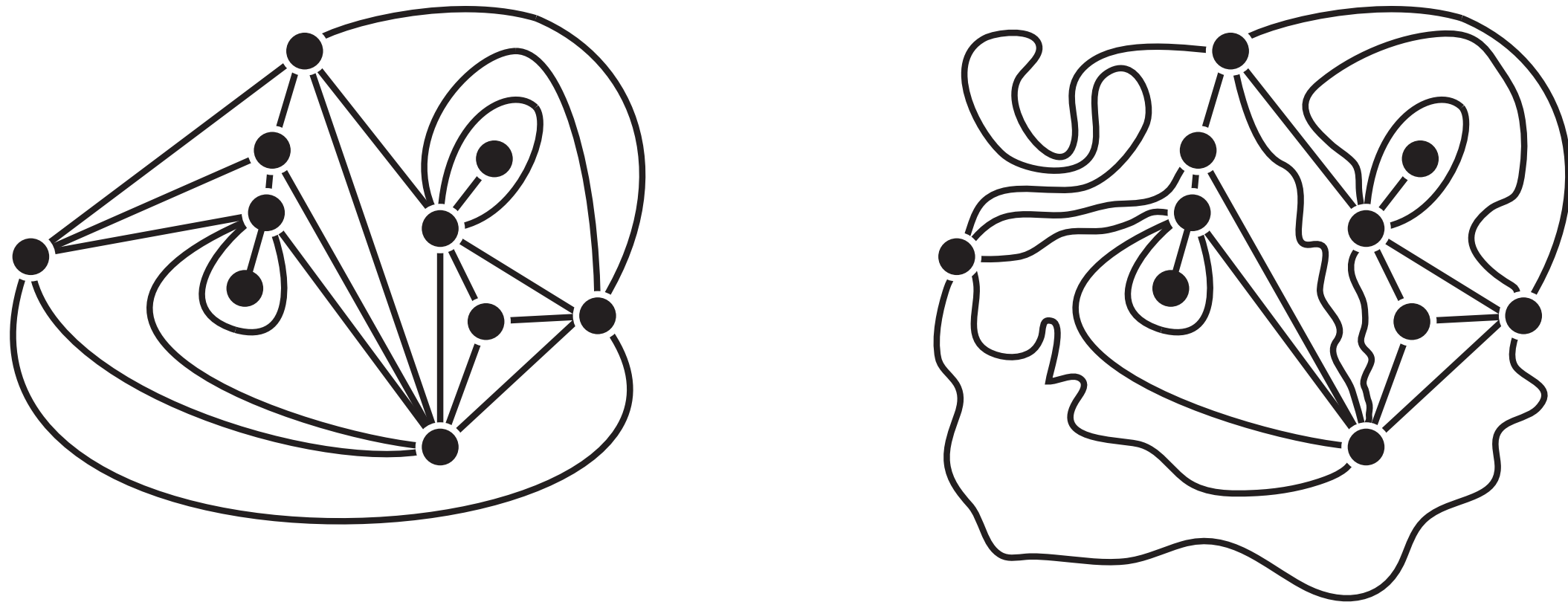


Figure – Deux triangulations identiques.



# Définitions

Une **carte** est un graphe fini connexe proprement plongé dans la sphère (considéré aux déformations continues préservant l'orientation près). Une carte est une **triangulation** lorsque toutes ses faces sont des triangles. Une carte est **enracinée** quand une arête orientée est distinguée.

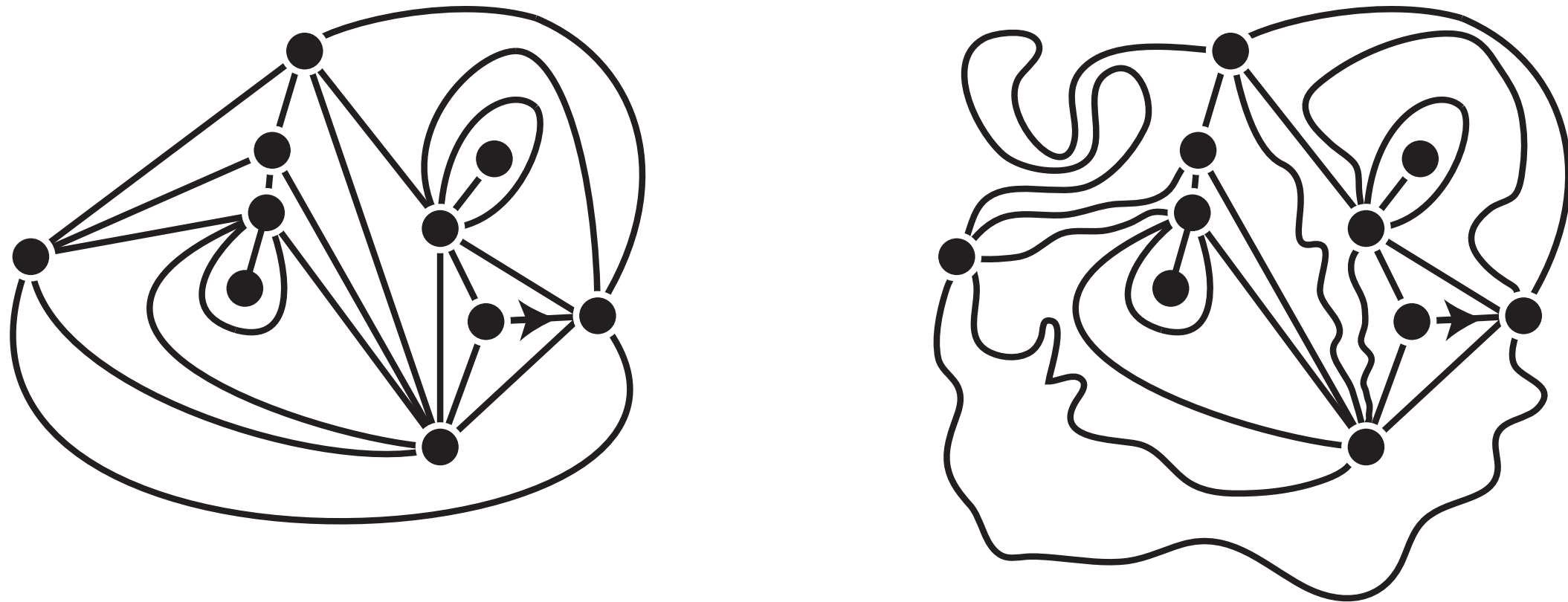
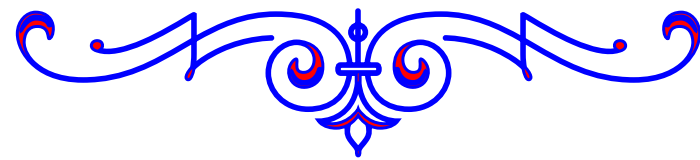


Figure – Deux triangulations enracinées identiques.

# PERCOLATION SUR L'UIPT



Curien & K : étude de la percolation critique par sites sur l'UIPT d'Angel & Schramm (triangulation aléatoire infinie uniforme du plan) :

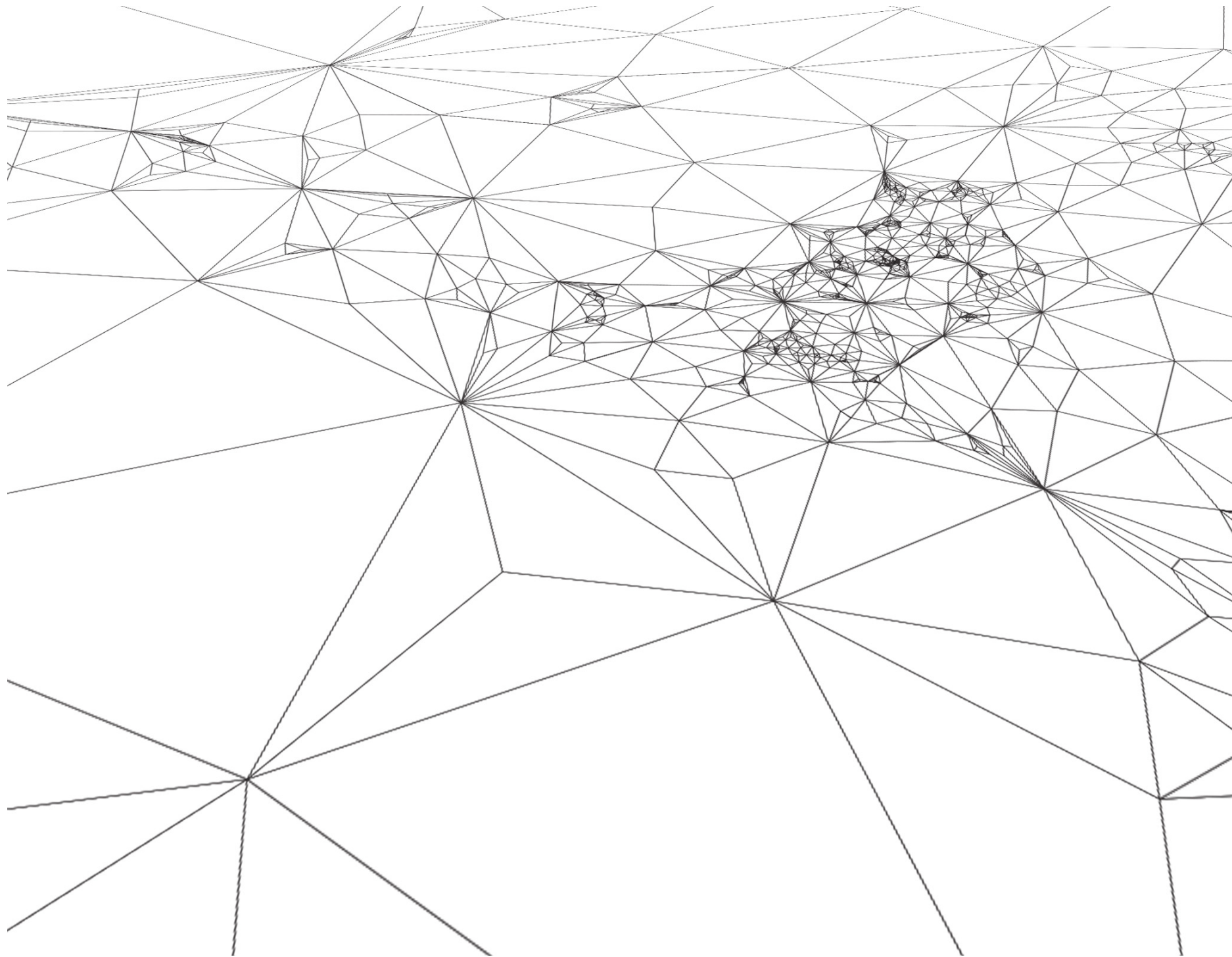


Figure – L'UIPT

Curien & K : étude de la percolation critique par sites sur l'**UIPT** d'Angel & Schramm (triangulation aléatoire infinie uniforme du plan) :

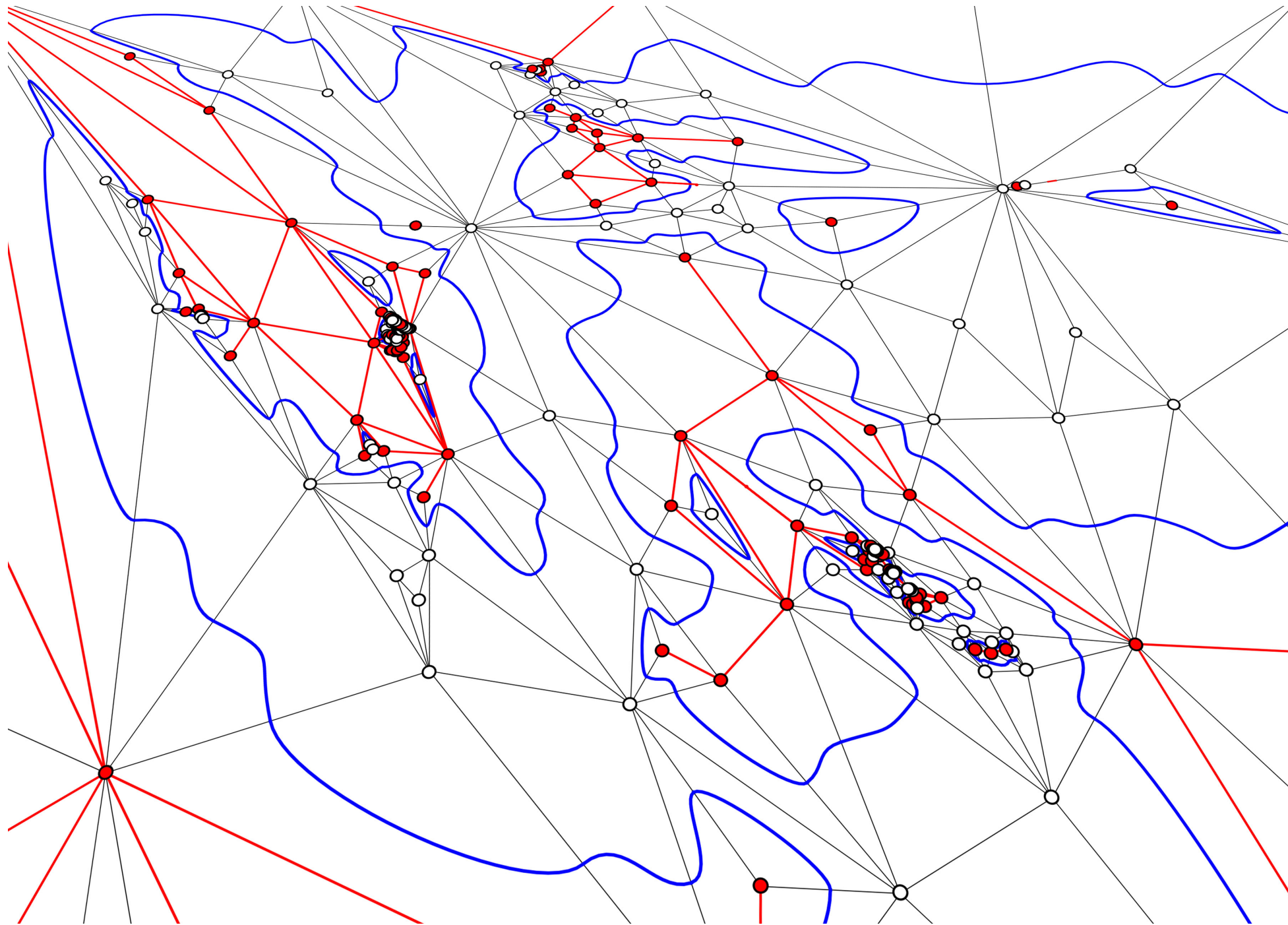


Figure – Percolation par sites de l'**UIPT**, avec interfaces de percolation en bleu.

# Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement donnée  $T_\infty$ , on considère une percolation par sites de paramètre  $1/2$

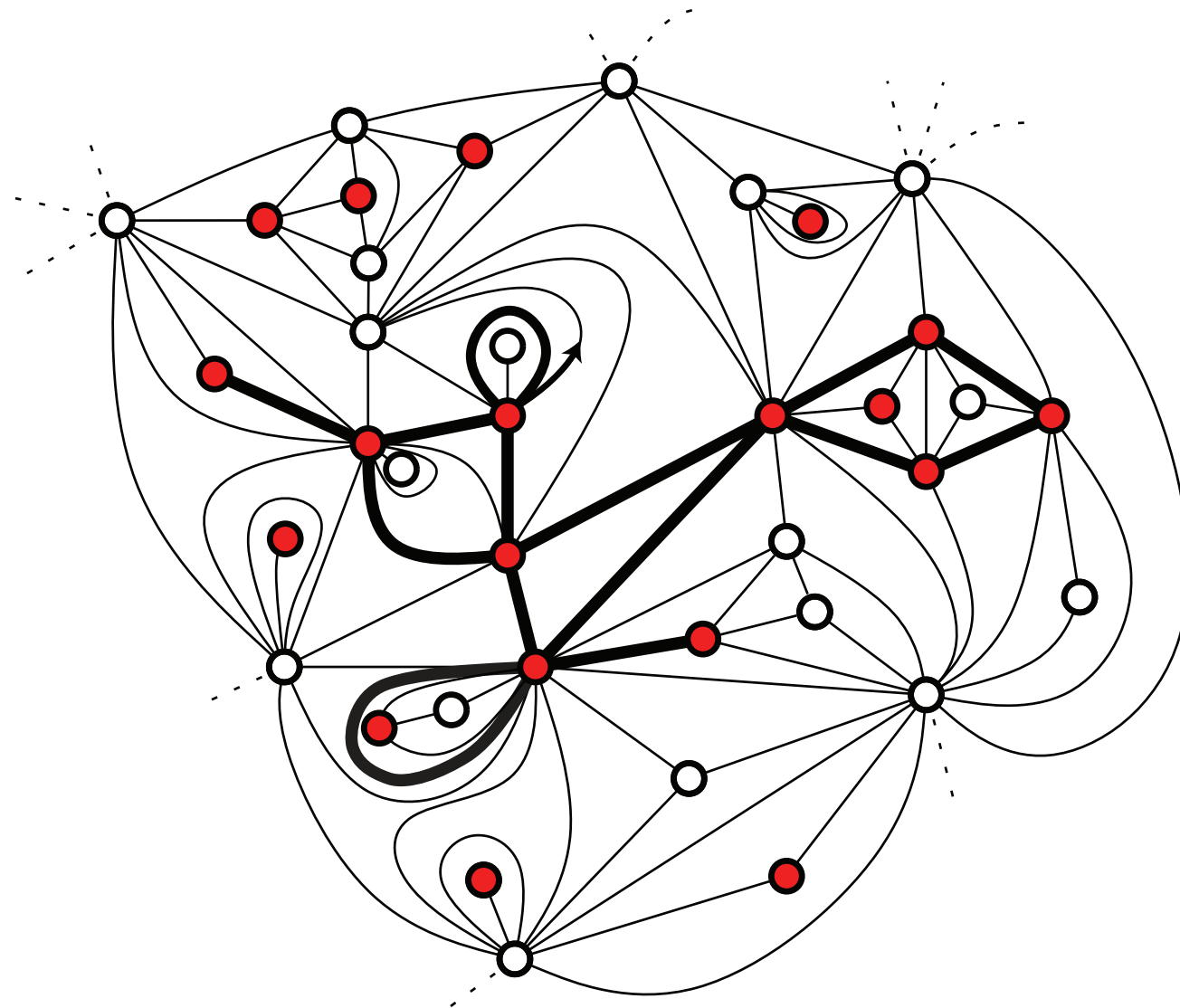


Figure – Une réalisation de la percolation par sites de l'UIPT.



# Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement donnée  $\mathcal{T}_\infty$ , on considère une percolation par sites de paramètre  $1/2$  avec un conditionnement spécial pour la racine.

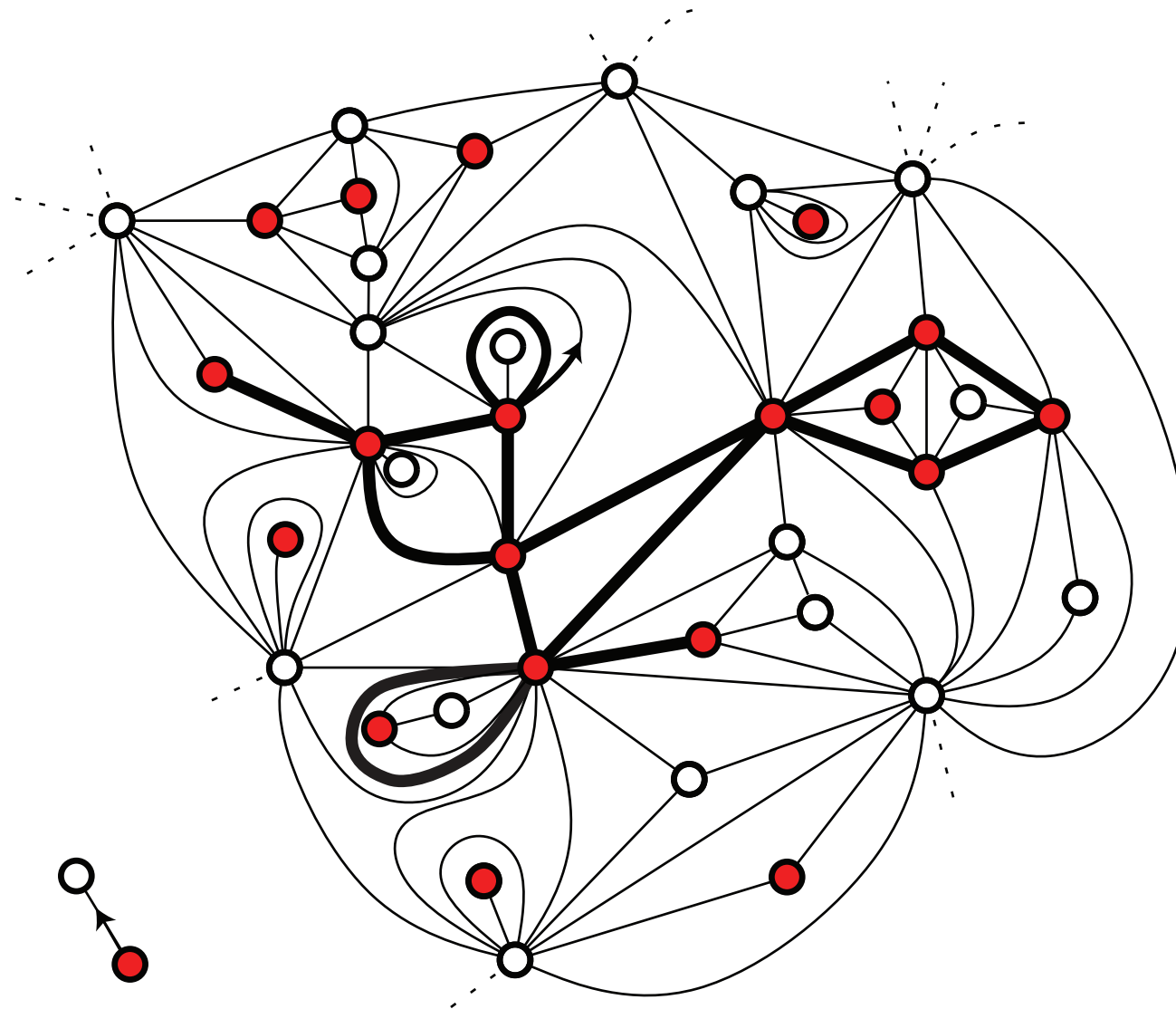


Figure – Une réalisation de la percolation par sites de l'UIPT.

# Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement donnée  $\mathcal{T}_\infty$ , on considère une percolation par sites de paramètre  $1/2$  avec un conditionnement spécial pour la racine.

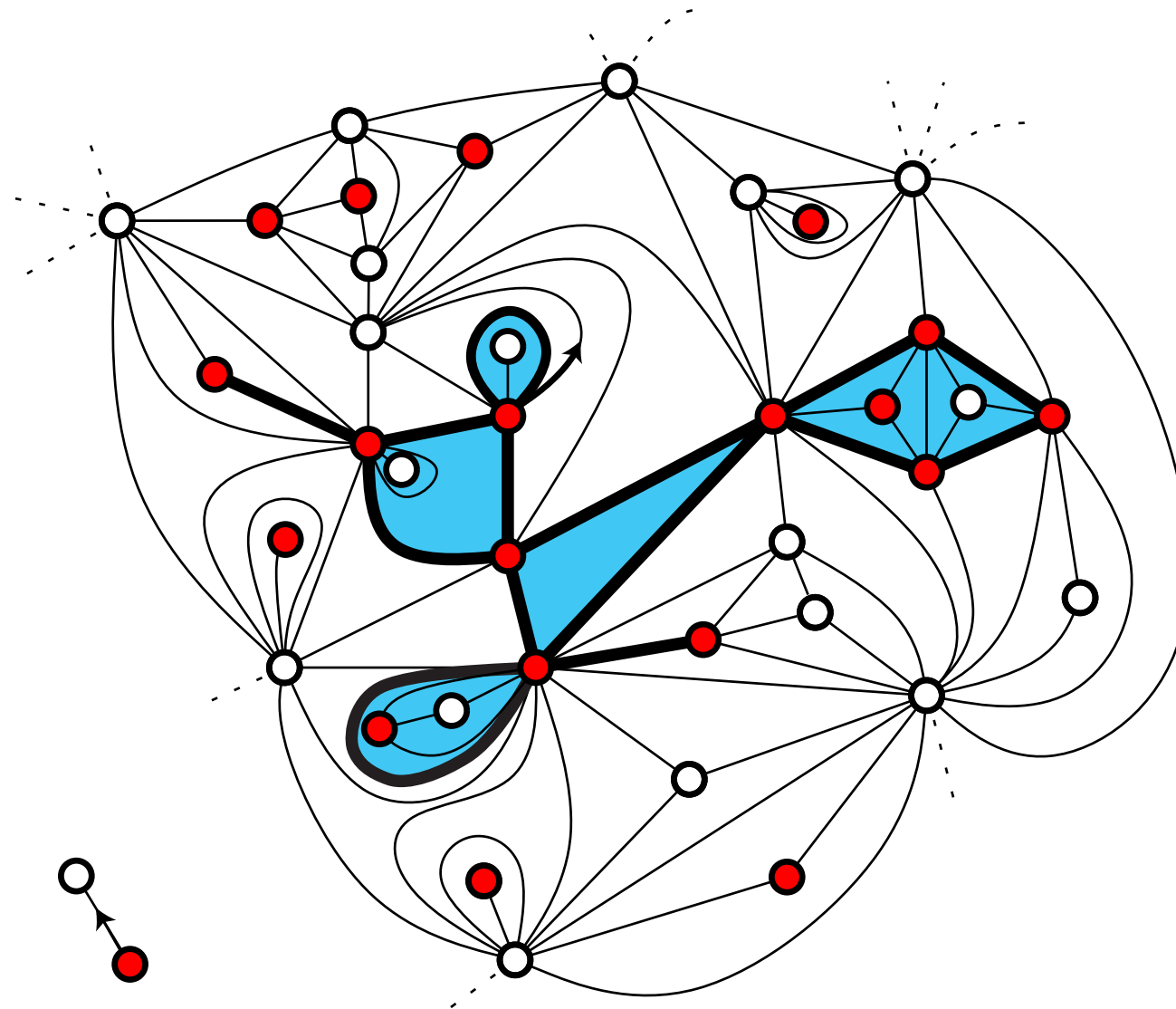


Figure – Le contenu de la composante connexe de l'origine.

# Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement donnée  $\mathcal{T}_\infty$ , on considère une percolation par sites de paramètre  $1/2$  avec un conditionnement spécial pour la racine.

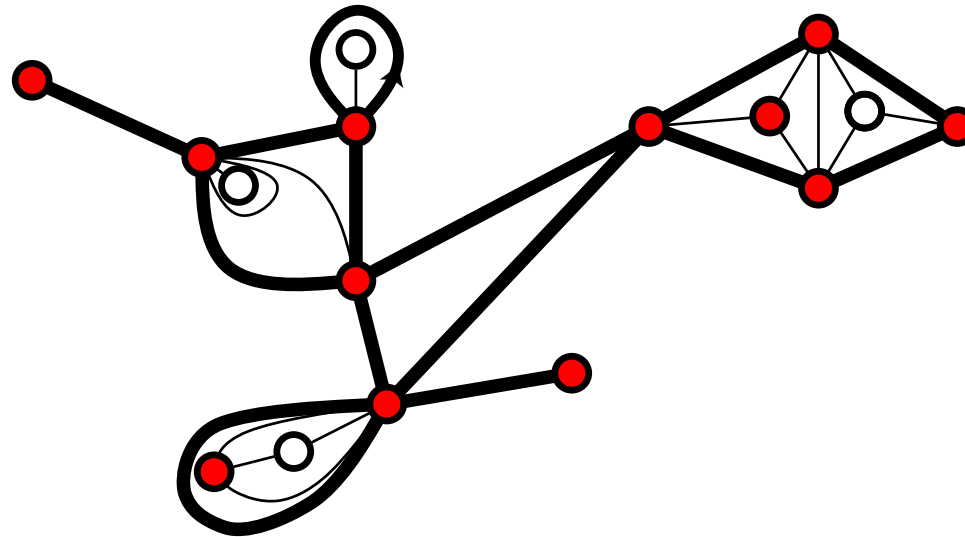


Figure – Le contenu de la composante connexe de l'origine, noté  $\mathcal{H}$ .



# Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement donnée  $\mathcal{T}_\infty$ , on considère une percolation par sites de paramètre  $1/2$  avec un conditionnement spécial pour la racine.

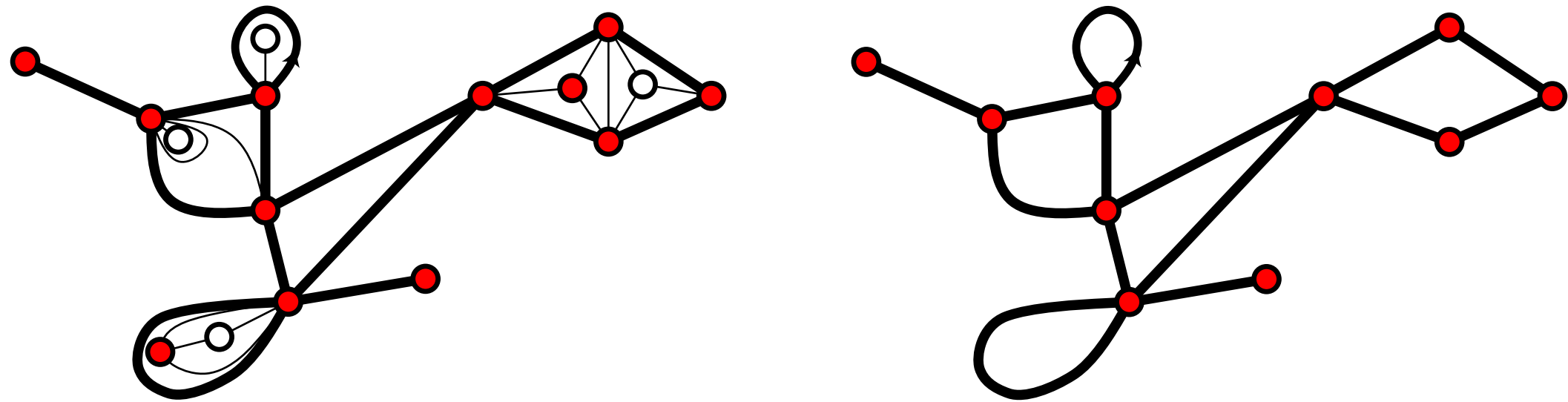


Figure – Le contenu de la composante connexe de l'origine  $\mathcal{H}$ , et son bord noté  $\partial\mathcal{H}$ .

Pour  $m \geq 1$ , on note  $\partial\mathcal{H}_m$  la variable aléatoire  $\partial\mathcal{H}$  conditionnée par l'événement  $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$ .

Pour  $m \geq 1$ , on note  $\partial\mathcal{H}_m$  la variable aléatoire  $\partial\mathcal{H}$  conditionnée par l'événement  $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$ .

### Théorème (Curien & K.).

La convergence

$$\frac{1}{m^{2/3}} \cdot \partial\mathcal{H}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2}$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

Pour  $m \geq 1$ , on note  $\partial\mathcal{H}_m$  la variable aléatoire  $\partial\mathcal{H}$  conditionnée par l'événement  $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$ .

### Théorème (Curien & K.).

La convergence

$$\frac{1}{m^{2/3}} \cdot \partial\mathcal{H}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2}$$

a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

De plus,

$$\mathbb{P}(\#\partial\mathcal{H} = m) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2 \cdot |\Gamma(-2/3)|^3} \cdot m^{-4/3}.$$

Pour  $m \geq 1$ , on note  $\partial\mathcal{H}_m$  la variable aléatoire  $\partial\mathcal{H}$  conditionnée par l'événement  $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$ .

### Théorème (Curien & K.).

La convergence

$$\frac{1}{m^{2/3}} \cdot \partial\mathcal{H}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2}$$

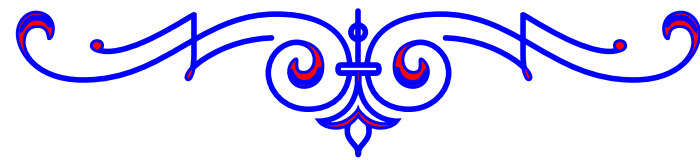
a lieu en loi pour la topologie de Gromov–Hausdorff.

De plus,

$$\mathbb{P}(\#\partial\mathcal{H} = m) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2 \cdot |\Gamma(-2/3)|^3} \cdot m^{-4/3}.$$

 **Idée** : coder  $\partial\mathcal{H}$  par un arbre BGW à deux types avec des lois de reproduction explicites.

# LIGNES DE NIVEAU DE SURFACES ALÉATOIRES



# *Lignes de niveau de la carte brownienne*

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ .

# *Lignes de niveau de la carte brownienne*


On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).





# *Lignes de niveau de la carte brownienne*

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).

 **Questions** (reliées à “l’exploration en largeur” de la **carte brownienne** par **Miller & Sheffield**) :

# *Lignes de niveau de la carte brownienne*

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).

↗ **Questions** (reliées à “l’exploration en largeur” de la **carte brownienne** par **Miller & Sheffield**) :

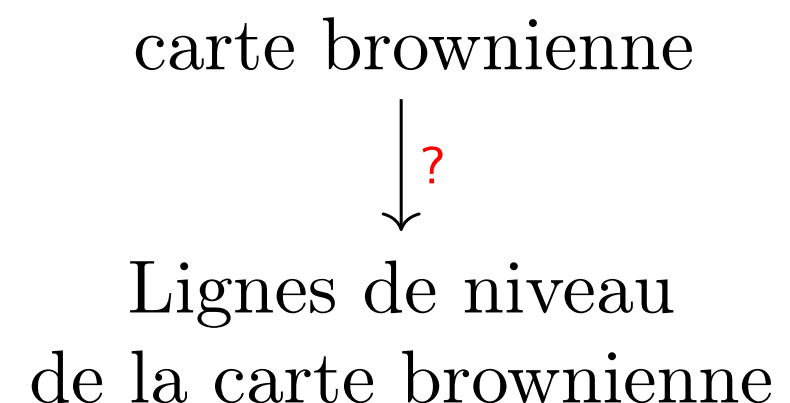
– Quelle est la loi du processus des lignes de niveau de **la carte brownienne** lorsque  $h$  grandit ?

# *Lignes de niveau de la carte brownienne*

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).

↗ **Questions** (reliées à “l’exploration en largeur” de la **carte brownienne** par **Miller & Sheffield**) :

– Quelle est la loi du processus des lignes de niveau de **la carte brownienne** lorsque  $h$  grandit ?

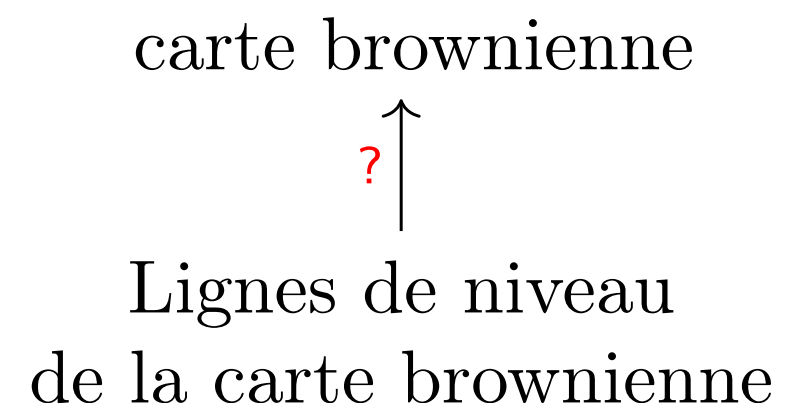


# Lignes de niveau de la carte brownienne

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).

↗ **Questions** (reliées à “l’exploration en largeur” de la **carte brownienne** par **Miller & Sheffield**) :

- Quelle est la loi du processus des lignes de niveau de **la carte brownienne** lorsque  $h$  grandit ?
- Reconstruction de la **carte brownienne** à partir des lignes de niveau ?



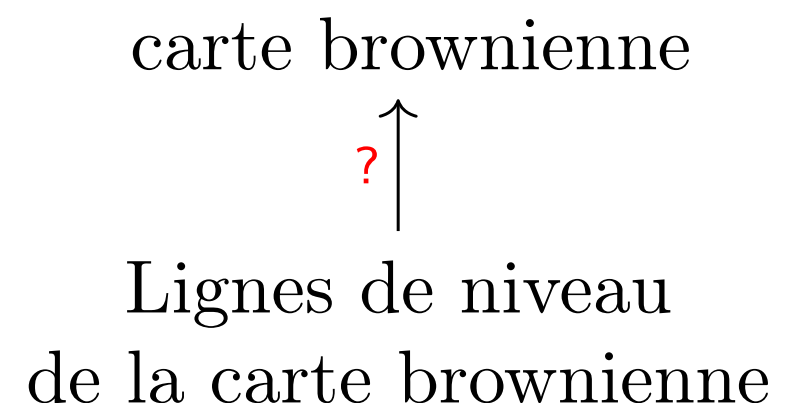
# Lignes de niveau de la carte brownienne

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).

↗ **Questions** (reliées à “l’exploration en largeur” de la **carte brownienne** par Miller & Sheffield) :

- Quelle est la loi du processus des lignes de niveau de **la carte brownienne** lorsque  $h$  grandit ?
- Reconstruction de la **carte brownienne** à partir des lignes de niveau ?

↗ **Notre résultat** : limite d’échelle du processus des lignes de niveau pour des triangulations aléatoires (**surfaces discrètes**).



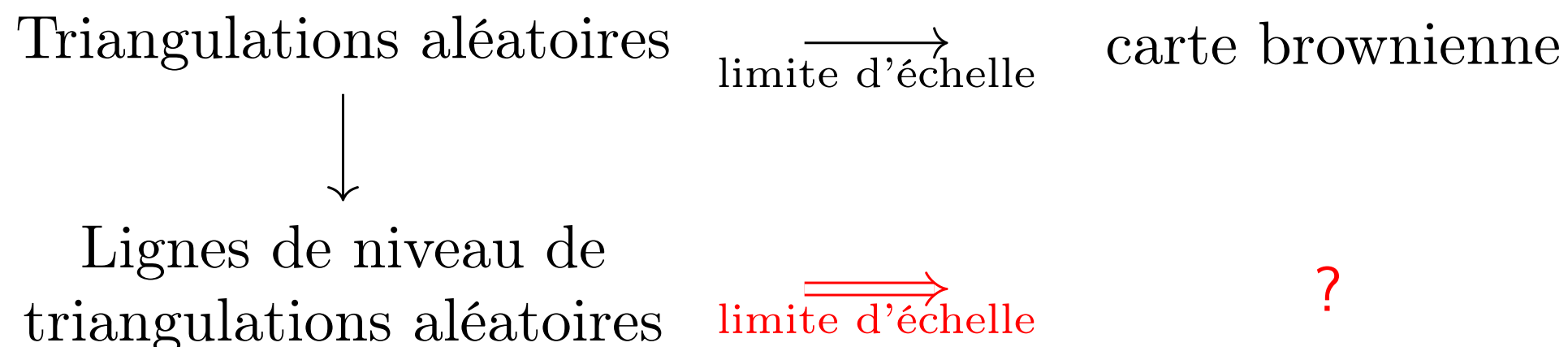
# Lignes de niveau de la carte brownienne

On imagine la **carte brownienne** de sorte que tout point à distance  $x$  de la racine est à « hauteur »  $x$ . Ensuite, pour tout  $h > 0$ , on garde seulement les points qui sont dans la boule de rayon  $h$  centrée en la racine, et on regarde les longueurs des cycles ainsi obtenus lorsque  $h$  grandit (processus des lignes de niveau).

↗ **Questions** (reliées à “l’exploration en largeur” de la **carte brownienne** par Miller & Sheffield) :

- Quelle est la loi du processus des lignes de niveau de **la carte brownienne** lorsque  $h$  grandit ?
- Reconstruction de la **carte brownienne** à partir des lignes de niveau ?

↗ **Notre résultat** : limite d’échelle du processus des lignes de niveau pour des **triangulations aléatoires (surfaces discrètes)**.



# *Grandes triangulations de Boltzmann à bord*

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone

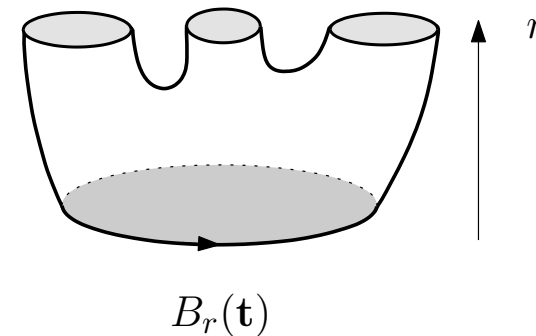
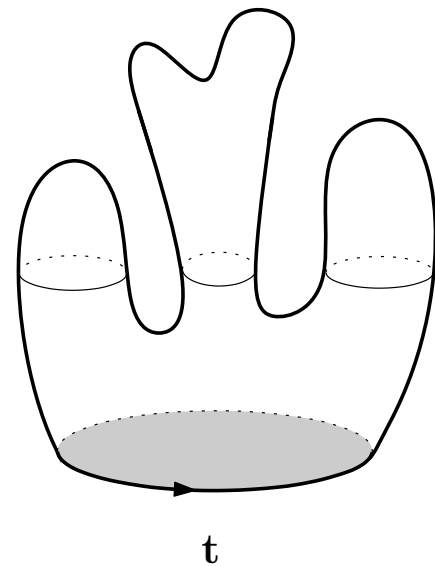
# *Grandes triangulations de Boltzmann à bord*

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord



# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord

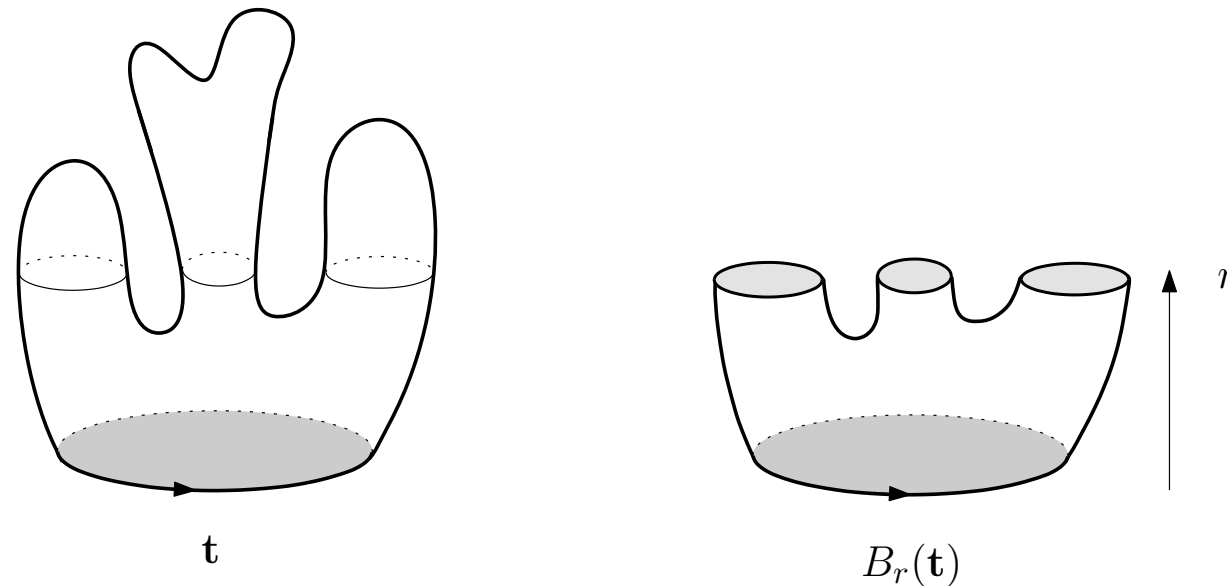


# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $\mathcal{T}^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(\mathcal{T}^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord, et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left( L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs des cycles de  $B_r(\mathcal{T}^{(p)})$ , rangés dans l'ordre décroissant.



# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord, et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left( L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs des cycles de  $B_r(T^{(p)})$ , rangés dans l'ordre décroissant.

## Théorème (Bertoin, Curien, K.).

La convergence

$$\left( \frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(t\sqrt{p}); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left( \mathbb{X} \left( \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

a lieu en loi dans  $\ell_3^\downarrow$ , où  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$  est un processus càdlàg à valeurs dans  $\ell_3^\downarrow$

# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord, et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left( L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs des cycles de  $B_r(T^{(p)})$ , rangés dans l'ordre décroissant.

## Théorème (Bertoin, Curien, K.).

La convergence

$$\left( \frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(t\sqrt{p}); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left( \mathbb{X} \left( \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

a lieu en loi dans  $\ell_3^\downarrow$ , où  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$  est un processus càdlàg à valeurs dans  $\ell_3^\downarrow$ , qui est un *processus de croissance-fragmentation auto-similaire* (Bertoin '15).

# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord, et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left( L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs des cycles de  $B_r(T^{(p)})$ , rangés dans l'ordre décroissant.

## Théorème (Bertoin, Curien, K.).

La convergence

$$\left( \frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(t\sqrt{p}); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left( \mathbb{X} \left( \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

a lieu en loi dans  $\ell_3^\downarrow$ , où  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$  est un processus càdlàg à valeurs dans  $\ell_3^\downarrow$ , qui est un *processus de croissance-fragmentation auto-similaire* (Bertoin '15).

↗ **Techniques** : exploration par épluchage d'une carte aléatoire (Watabiki, Angel, Budd),

# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord, et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left( L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs des cycles de  $B_r(T^{(p)})$ , rangés dans l'ordre décroissant.

## Théorème (Bertoin, Curien, K.).

La convergence

$$\left( \frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(t\sqrt{p}); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left( \mathbb{X} \left( \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

a lieu en loi dans  $\ell_3^\downarrow$ , où  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$  est un processus càdlàg à valeurs dans  $\ell_3^\downarrow$ , qui est un *processus de croissance-fragmentation auto-similaire* (Bertoin '15).

↗ Techniques : martingales,

# Grandes triangulations de Boltzmann à bord

Soit  $T^{(p)}$  une triangulation de Boltzmann d'un  $p$ -gone, soit  $B_r(T^{(p)})$  la carte constituée des sommets à distance au plus  $r$  du bord, et

$$\mathbb{L}^{(p)}(r) := \left( L_1^{(p)}(r), L_2^{(p)}(r), \dots \right).$$

les longueurs des cycles de  $B_r(T^{(p)})$ , rangés dans l'ordre décroissant.

## Théorème (Bertoin, Curien, K.).

La convergence

$$\left( \frac{1}{p} \cdot \mathbb{L}^{(p)}(t\sqrt{p}); t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(d)} \left( \mathbb{X} \left( \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot t \right); t \geq 0 \right),$$

a lieu en loi dans  $\ell_3^\downarrow$ , où  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t); t \geq 0)$  est un processus càdlàg à valeurs dans  $\ell_3^\downarrow$ , qui est un *processus de croissance-fragmentation auto-similaire* (Bertoin '15).

↪ **Techniques** : utilisation d'un théorème limite fonctionnel général de chaînes de Markov sur  $\mathbb{N}$  vers un processus de Markov auto-similaire (Bertoin & K.).