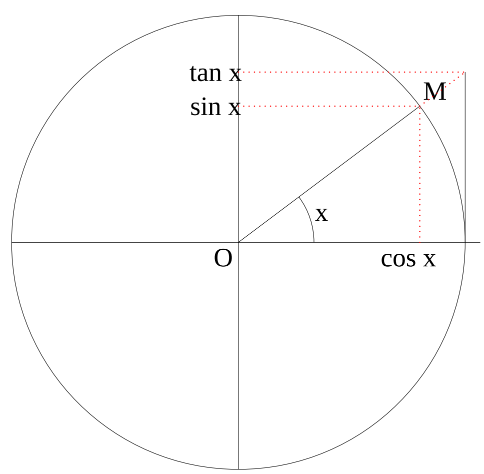
Le point sur la trigonométrie

PCSI1 Lycée Pasteur

4 septembre 2007

1 Cercle trigonométrique, radians

Définition 1. Le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé, est le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique, et x est appelé mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. L'abscisse et l'ordonnée du point M associé à x sont appelées respectivement cosinus et sinus de ce réel. On définit par ailleurs la tangente quand c'est possible, c'est à dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et la cotangente pour $x \neq k\pi$ par $\text{cotan } x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



Remarque 1. Le repérage du cercle trigonométrique suppose le choix d'une orientation sur ce cercle. on appelle sens trigonométrique (ou positif) le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Proposition 1. Valeurs remarquables à connaitre :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	0	$\|$

Démonstration. Pour les multiples de $\frac{\pi}{2}$, il suffit de regarder le cercle trigonométrique. Pour $\frac{\pi}{4}$, on obtient les valeurs facilement en se plaçant dans un demi-carré de côté 1. La diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$, donc le cosinus comme le sinus de chacun des deux angles de mesure $\frac{\pi}{4}$ valent $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour

$\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on se place dans un demi-triangle équilatéral de côté 1. Les longueurs des trois côtés sont donc 1 ; $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc on déduit sans difficulté les valeurs des lignes trigonométriques. $\square$

Proposition 2. Propriétés du cosinus, du sinus et de la tangente

- $\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \sin(x+2\pi) = \sin x \quad \tan(x+2\pi) = \tan x$
- $\cos(x+\pi) = -\cos x \quad \sin(x+\pi) = -\sin x \quad \tan(x+\pi) = \tan x$
- $\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \tan(-x) = -\tan x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x \quad \sin(\pi-x) = \sin x \quad \tan(\pi-x) = -\tan x$
- $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\text{cotan } x$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \quad \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x \quad \tan(\frac{\pi}{2}-x) = \text{cotan } x$

Démonstration. C'est toujours une question de symétries du cercle trigonométrique : à $x+2\pi$ correspond le même point qu'à x ; à $x+\pi$ le symétrique par rapport à 0 ; à $-x$ le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; à $\pi-x$ celui par rapport à l'axe des ordonnées ; à $x+\frac{\pi}{2}$ l'image par une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et enfin à $\frac{\pi}{2}-x$ l'image par la composée de cette rotation et de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (en commençant par la symétrie). $\square$

2 Formules trigonométriques

Commençons par la plus célèbre et ses dérivées :

Proposition 3. Pour tout réel x, $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$; $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $1+\text{cotan }^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Démonstration. Soit M le point associé à x sur le cercle trigonométrique. La distance OM, qui vaut 1, est égale à $\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}$, ce qui élevé au carré donne notre inégalité. On a ensuite $1+\tan^2 x = \frac{cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ et de même pour la dernière égalité en inversant les rôles du cosinus et du sinus. $\square$

Remarque 2. Ces formules permettent de calculer les valeurs de toutes les lignes trigonométriques à partir de la connaissance de leurs signes et de l'une d'elles.

Les formules suivantes sont toutes à connaitre parfaitement et surtout à ne pas confondre les unes avec les autres. Nous verrons un peu plus tard comment les retenir plus facilement à l'aide des exponentielles complexes.

Proposition 4. Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b-\cos a\sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

Démonstration. Soit M et N les points du cercle trigonométrique de coordonnées respectives $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos b, \sin b)$ et M' l'image de M par rotation autour de l'origine d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triplet $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est un repère (orthonormal direct). Les coordonnées de N dans ce repère sont $(\cos b, \sin b)$, donc $\overrightarrow{ON} = \cos b\ \overrightarrow{OM}+\sin b\ \overrightarrow{OM'} = \cos b\ (\cos a\ \overrightarrow{i}+\sin a\ \overrightarrow{j})+\sin b\ (-\sin a\ \overrightarrow{i}+\cos a\ \overrightarrow{j}) = (\cos a\cos b-\sin a\sin b)\ \overrightarrow{i}+(\sin a\cos b-\cos a\sin b)\ \overrightarrow{j}$. Or, on sait que les coordonnées de N dans le repère initial sont $(\cos(a+b), \sin(a+b))$. Par identification, on obtient les formules d'addition du sinus et du cosinus. On a ensuite $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b} = \dfrac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.
Pour obtenir les formules de soustraction, on reprend les formules précédentes en remplaçant b par $-b$. $\square$

Exemple Calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On utilise le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. De même, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Proposition 5. Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$
- $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$
- $\sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$

Démonstration. Ce ne sont que des cas particuliers des formules d'addition, mais il est bon de bien les connaitre. Pour obtenir $\cos(3a)$, on applique la formule d'addition à a et $2a$: $\cos(3a) = \cos(2a)\cos a - \sin(2a)\sin a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a \sin^2 a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$. □

Remarque 3. On peut calculer les valeurs de $\cos(na)$ et $\sin(na)$ de proche en proche de cette manière, mais on verra une méthode plus efficace au prochain chapitre.

Proposition 6. Transformations de sommes en produits (et vice versa)

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Démonstration. Rien de compliqué, les trois première formules découlent des formules d'addition, par exemple $\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2\cos a \cos b$. On obtient de même les deux formules suivantes, puis les quatre dernières s'obtiennent directement en partant du membre de droite et en utilisant les trois premières. □

Enfin, dernières formules qui serviront surtout au moment d'aborder les calculs d'intégrales trigonométriques :

Proposition 7. En posant $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

Démonstration. Par la formule d'addition des tangentes, $\tan a = \tan\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$. De plus $\cos^2 a = \frac{1}{1+\tan^2 a} = \left(\frac{(1-t)^2 + 4t^2}{(1-t)^2}\right)^{-1} = \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}$. Comme $\cos a \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] [2\pi] \Leftrightarrow \frac{a}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \tan\frac{a}{2} \in [-1, 1]$, on aura toujours $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. On en déduit enfin $\sin a = \cos a \tan a = \frac{2t}{1+t^2}$. □

3 Équations trigonométriques

Rappelons simplement les propriétés fondamentales suivantes, puis nous traiterons quelques exemples éclairants plutôt que de donner des listes de formules compliquées :

Proposition 8. Les équations trigonométriques les plus simples se résolvent de la façon suivante :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ **ou** $x \equiv -a[2\pi]$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ **ou** $x \equiv \pi - a[2\pi]$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x \equiv a[\pi]$

Démonstration. Deux réels ont même cosinus si leurs images sur le cercle trigonométrique ont même abscisse, c'est-à-dire si elles sont confonfues ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ce qui correspond aux deux solutions possibles (modulo 2π). De même pour le sinus, les points sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Enfin, $\tan^2 x = \tan^2 a$ si $\cos x = \cos a$ ou $\cos x = -\cos a$, ce qui donne comme solutions possibles $x \equiv a[2\pi]$, $x \equiv -a[2\pi]$, $x \equiv a + \pi[2\pi]$ et $x \equiv \pi - a[2\pi]$. Parmi celles-ci, seules deux ont une tangente de même signe, ce qui donne bien le résultat annoncé. □

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

D'après la proposition précédente, et le fait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, on a $x \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pas de raison de changer de méthode : $3x \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $3x \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$, donc $x \equiv \dfrac{\pi}{12}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Sans difficulté particulière : $x - \dfrac{\pi}{6} \equiv 2x + \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x - \dfrac{\pi}{6} \equiv -2x - \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, c'est-à-dire $x \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{18}\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$, soit $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{-\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

On commence par transformer le cos en sin (ou le contraire) : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$. On a donc $3x \equiv \dfrac{\pi}{3} - x[2\pi]$ ou $3x \equiv x + \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, soit $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Il faut éviter quand c'est possible de faire un changement de variable et de résoudre une équation du second degré. Ici, on peut utiliser les formules de duplication : $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$, donc l'équation est équivalente à $\cos 2x = \cos x$, donc $2x \equiv x[2\pi]$ ou $2x \equiv -x[2\pi]$, c'est-à-dire que $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On doit avoir $2x - \dfrac{\pi}{3} \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right[\ [2\pi]$, donc $2x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{3}\right[\ [2\pi]$, soit $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + k\pi\right[$.

4 Fonctions trigonométriques

Proposition 9. La fonction $x \mapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$, paire, 2π-périodique, et de courbe symétrique par rapport à $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. Elle est continue et dérivable, et $\cos' = -\sin$. On a donc le tableau de variations suivant sur $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Démonstration. La périodicité et les propriétés de symétrie de symétrie découlent des propriétés $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$, déjà vues auparavant. Pour calculer la dérivée (et démontrer la continuité par la même occasion), il faut revenir au calcul du taux d'accroissement : soit $a, h \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \dfrac{\cos a \cos h - \sin a \sin h - \cos a}{h} = \cos a \left(\dfrac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin a \dfrac{\sin h}{h}$.

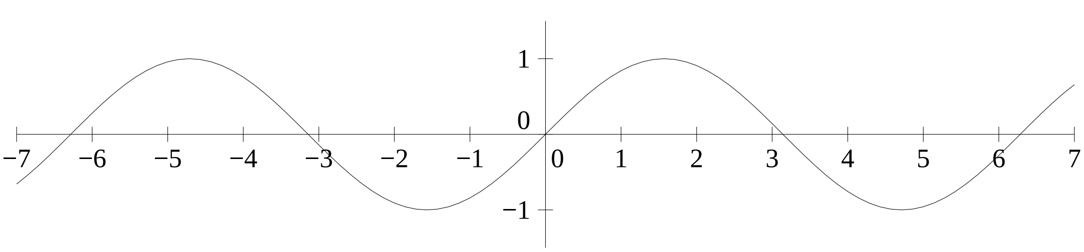
Restent à déterminer les limites de ces expressions quand h tend vers 0. Or, quand $h \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on constate géométriquement que $\sin h \leqslant h \leqslant \tan h$: en effet, si on note M le point correspondant à h sur le cercle trigonométrique et N l'intersection de (OM) et de la droite d'équation $x = 1$, $\sin x$ représente l'aire du triangle OIM, $\tan x$ l'aire du triangle OIN et x l'aire de l'arc de cercle compris entre ces deux triangles. En multipliant l'inégalité de droite par $\cos h$, on obtient également $h \cos h \leqslant \sin h$. On a donc $h \cos h \leqslant \sin h \leqslant h$, donc en divisant par h, $\cos h \leqslant \dfrac{\sin h}{h} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

On en déduit facilement que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin^2 h}{h} = 0$. Or $\dfrac{\sin^2 h}{h} = \dfrac{1 - \cos^2 h}{h} = \dfrac{1 - \cos h}{h}(1 + \cos h)$. Comme $\lim\limits_{h \to 0} (1 + \cos h) = 2$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos h}{h} = 0$. Si on revient à notre calcul de taux de variation initial, on a prouvé que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a$, ce qui montre que la dérivée du cosinus est l'opposé du sinus. $\square$

Proposition 10. La fonction $x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique, et de courbe symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$. Elle est continue et dérivable, et $\sin' = \cos$. On a donc le tableau de variations suivant sur $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbe représentative :



Démonstration. Les propriétés de symétrie sont issues des propriétés du sinus déjà vues, Quand à la dérivée, on procède comme pour le cosinus : $\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \dfrac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \sin a \left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos a \dfrac{\sin h}{h}$. Les calculs de limite de la démonstration précédente prouvent que ce taux d'accroissement tend vers $\sin a$ quand h tend vers 0. $\square$

Proposition 11. La fonction $x \mapsto \tan x$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, impaire et π-périodique. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition, et $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$. On a donc le tableau de variations suivant sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Démonstration. Une fois de plus, seul le calcul de la dérivée n'a pas déjà été fait. Or, on a sur son intervalle de définition $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc $\tan'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. $\square$

Proposition 12. La fonction $x \mapsto \text{cotan } x$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, impaire et π-périodique. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition, et $\text{cotan }' = -1 - \tan^2 = -\dfrac{1}{\sin^2}$. On a donc le tableau de variations suivant sur $]0, \pi[$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\text{cotan } x$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

Démonstration. Très similairement, on a $\text{cotan }'(x) = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. $\square$