Exercices de trigonométrie

PCSI 2 Lycée Pasteur

5 septembre 2007

Exercice 1

En constatant que $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{4}$, on obtient $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$. Comme de plus $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, on a $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. De même, on a $1 - \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, puis $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Enfin, on en déduit $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

Quand à $\frac{\pi}{24}$, on peut l'écrire sous la forme $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$, donc $\cos\frac{\pi}{24} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{6+3\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$. De même, $\sin\frac{\pi}{24} = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{4}$.

Enfin, $\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{\sqrt{6+3\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. On peut simplifier si on est courageux :

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{24} &= \frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{6-3\sqrt{2}})(\sqrt{6+3\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}})}{6+3\sqrt{2}-2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{18-12\sqrt{2}}-\sqrt{18}-\sqrt{2}+\sqrt{18-12\sqrt{2}}}{4+4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}})-4\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\sqrt{6}(1-\sqrt{2})(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}})-4\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{4(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} \\
&= \sqrt{2}-2+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{4}(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}})
\end{aligned}.$$

Exercice 2

1. On a $\cos(4t) = 0 \Leftrightarrow 4t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{4}\right]$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Commençons par faire le changement de variables $X = x^2$, on obtient $8X^2 - 8X + 1$, dont le discriminant réduit vaut $\Delta' = 16 - 8 = 8 = (2\sqrt{2})^2$. Les deux solutions de l'équation sont donc $X_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $X_2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Cela donne quatre solutions possibles pour x : $x_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $x_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $x_4 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

3. Ca doit bien avoir un lien avec les question précédente... En effet, on constate que $\cos(4t) = \cos(2t+2t) = 2\cos^2(2t)-1 = 2(2\cos^2 t-1)^2-1 = 2(4\cos^4 t-4\cos^2 t+1)-1 = 8\cos^4 t-8\cos^2 t+1$. Comme $\cos\dfrac{4\pi}{8} = 0$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$ est donc solution de l'équation résolue à la question précédente, ainsi que $\cos\dfrac{3\pi}{8}$, $\cos\dfrac{5\pi}{8}$ et $\cos\dfrac{7\pi}{8}$ pour les mêmes raisons. Parmi les quatre solutions trouvées, 2 sont négatives, les deux autres correspondent à $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\cos\dfrac{3\pi}{8}$. Reste à garder la plus grande des deux pour l'angle le plus petit, d'où $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et $\cos\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 3

1. $\dfrac{\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)}{1+\cos(2x)+\cos(4x)} = \dfrac{2\sin(4x)\cos(2x)+\sin(4x)}{2\cos(2x)\cos(2x)+\cos(2x)} = \dfrac{\sin(4x)}{\cos(2x)} = \dfrac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\cos(2x)} = 2\sin(2x)$ (pour la première étape, on a utilisé les formules de transformation somme/produit sur les deux termes extrêmes).
2. $\dfrac{\sin^3 x+\sin x\cos^2 x}{\tan^3 x+\tan x} = \dfrac{\sin x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\tan x(1+\tan^2 x)} = \dfrac{\sin x\cos^2 x}{\tan x} = \cos^3 x$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
& 3(\cos^4 x+\sin^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)\\
= \ & 3[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x]-2[(\cos^2 x+\sin^2 x)^3-3\cos^4 x\sin^2 x-3\cos^2 x\sin^4 x]\\
= \ & 3-6\cos^2 x\sin^2 x-2+6\cos^4 x\sin^2 x+6\cos^2 x\sin^4 x\\
= \ & 1-6\cos^2 x\sin^2 x+6\cos^2 x\sin^2 x(\cos^2 x+\sin^2 x)\\
= \ & 1
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. $\tan(2x) = 1 \iff 2x \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi] \iff x \equiv \dfrac{\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

2. $\sin x+\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \iff \cos\dfrac{\pi}{4}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = \cos\theta$, où on définit θ comme étant le réel de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ (un tel réel existe puisque $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{6}}{4} \leqslant 1$). On a ensuite $\dfrac{\pi}{4}-x \equiv \theta[2\pi]$ ou $\dfrac{\pi}{4}-x \equiv -\theta[2\pi]$, d'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}-\theta+2k\pi, \dfrac{\pi}{4}+\theta+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. $\cos(5x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right) \iff 5x \equiv \dfrac{2\pi}{3}-x[2\pi]$ ou $5x \equiv x-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \iff x \equiv \dfrac{2\pi}{18}\left[\dfrac{2\pi}{6}\right]$ ou $x \equiv -\dfrac{2\pi}{12}\left[\dfrac{2\pi}{4}\right]$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{x}{4} \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{x}{4} \iff -x-\dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{x}{4}[2\pi]$ ou $-x-\dfrac{\pi}{4} \equiv -\dfrac{x}{4}[2\pi] \iff \dfrac{5x}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\dfrac{3x}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{5}+k\dfrac{8\pi}{5}, -\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{3\pi}{5} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. Il suffit d'utiliser la formule de transformation produit/somme : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos(2x)+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}+k\pi, -\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. En divisant par 2, tout va mieux : $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, d'où $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Beaucoup moins compliqué que ça n'en a l'air, il suffit d'y croire :
$$\begin{aligned} & \sin(3x)\cos^3 x + \sin^3 x\cos(3x) &=& \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow\ & (3\sin x - 4\sin^3 x)\cos^3 x + \sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) &=& \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \sin x\cos^3 x - \sin^3 x\cos x &=& \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) &=& \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) &=& \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(4x) &=& 1 \end{aligned}$$
On a donc $4x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Ce sont ici les formules de transformations somme/produit qui vont être utiles : $\sin(9x) + \sin(5x) + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin(9x)+\sin(5x)-\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(7x)\cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x)(2\sin(7x)-1) = 0$. On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $7x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $7x \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$, soit $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}, \frac{5\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 6

1. $\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right][2\pi] \Leftrightarrow 3x \in [0,\pi][2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{2k\pi}{3}, \frac{2(k+1)\pi}{3}\right]$.
2. $\sin x - \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right][2\pi]$, d'où $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[(2k-1)\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$.
3. On ne peut pas échapper à un changement de variable, posons donc $X = \cos x$. Le trinome $2x^2-3x+1$ a pour racine évidente 1, il se factorise en $2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, et est donc strictement négatif sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. L'inéquation initiale est donc équivalente à $\cos x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right] \backslash \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4.
$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x &\leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right) &\leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2\cos x\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) &\leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{6} &\leqslant \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) &\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
donc $2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ $[2\pi]$, dont on déduit $\mathcal{S}=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7k\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$.

5. $\dfrac{2\sin^2 x-3\cos x}{\cos x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-3\cos x-2\cos^2 x}{\cos x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{-2(\cos x+2)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}{\cos x}>0$. On peut faire un petit tableau de signes entre $-\pi$ et π pour voir ce qui se passe :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\cos x+2$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\cos x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$2\sin x\tan x-3$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

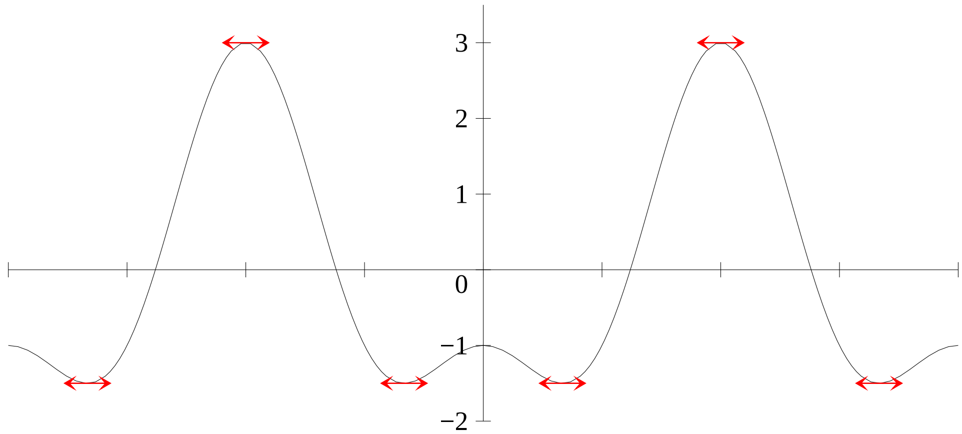
Conclusion : $\mathcal{S}=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$.

Exercice 7

1. On a $\cos x\geqslant\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ $[2\pi]$.
2. La fonction f est 2π-périodique : $f(x+2\pi)=\cos(2x+4\pi)-2\cos(x+2\pi)=f(x)$. Il est vain de chercher une période plus petite, $\cos(2x)$ étant π-périodique mais pas $\cos x$. De plus, f est paire, puisque cos l'est. On peut donc se contenter d'étudier f sur l'intervalle $[0,\pi]$.
3. Dérivons donc : $f'(x)=-2\sin(2x)+2\sin x=2\sin x-4\sin x\cos x=2\sin x(1-2\cos x)$. En utilisant le résultat de la première question, on obtient le tableau suivant (sur $[0,\pi]$, le sin est toujours positif) :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

4. Évidemment, je triche un peu, je vous donne plus qu'une allure (sur l'axe des abscisses, une graduation correspond à $\dfrac{\pi}{2}$, avant la Toussaint j'arriverai peut-être à mettre des symboles π dans mes figures) :



Exercice 8

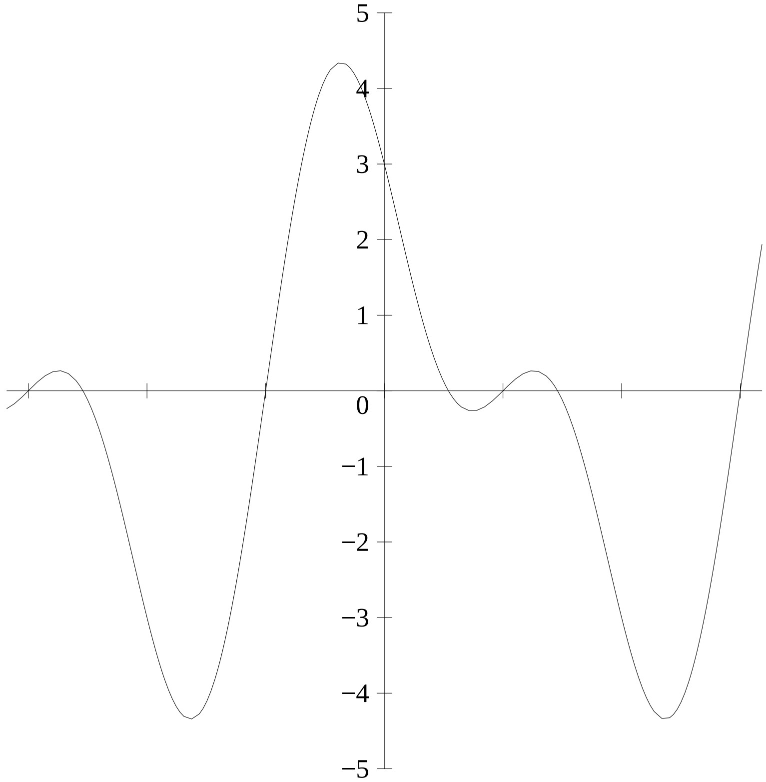
La fonction g est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, elle est 2π-périodique (et pas mieux), et ni paire ni impaire. Par contre, on a une symétrie (certes peu évidente à constater) par rapport au point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 3\sin x - 2\sin(2x+\pi) = 3\sin x + 2\sin(2x) = -f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ puisque cette expression est impaire. On peut donc se contenter de faire l'étude de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Avant d'étudier les variations de g, commençons par nous intéresser à son signe : $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x(3-4\sin x) \geqslant 0$. La fonction f est donc positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \theta\right]$ et négative sur $\left[\theta, \frac{\pi}{2}\right]$, où θ vérifie $\sin\theta = \frac{3}{4}$ (pour se donner une idée, θ est légèrement supérieur à $\frac{\pi}{4}$ puisque $\frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$). La fonction s'annule en θ et en $\pm\frac{\pi}{2}$.

Reste à calculer la dérivée : $f'(x) = -3\sin x - 4\cos(2x) = 8\sin^2 x - 3\sin x - 4$. Le trinome $8x^2 - 3x - 4$ a pour discriminant $\Delta = 9 + 128 = 137$, donc le trinome s'annule pour $x_1 = \frac{3-\sqrt{137}}{16}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{137}}{16}$. Ces deux valeurs sont comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$, notons θ_1 et θ_2 les réels de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\sin\theta_1 = x_1$ et $\sin\theta_2 = x_2$. Au vu de l'étude du signe faite plus haut, on a nécessairement $\theta \leqslant \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, et par ailleurs $\theta_1 \neq 0$, donc le tableau de variations de g va ressembler à ceci :

x	$-\frac{\pi}{2}$		θ_1		θ		θ_2		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\theta_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\theta_2)$	$\nearrow$	0

On peut, si on est courageux, calculer des valeurs exactes de $f(\theta_1)$ et $f(\theta_2)$ (on connait la valeur du sinus, on peut en déduire celle du cosinus et donc l'image par f), mais cela n'a que peu d'intérêt, on a suffisamment d'informations pour donner une allure de la courbe. Contentons-nous d'un ordre de grandeur : $\sin\theta_1$ est proche de $-\frac{1}{2}$, donc $f(\theta_1)$ ne sera pas très éloignée de $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \simeq 4.25$.


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5