Exercices sur les relations : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

24 septembre 2007

Exercice 1

- La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$ est évidemment une relation d'ordre, qui plus est totale.
- La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$est bien une relation d'ordre : un entier n est divisible par lui-même (on peut admettre que 0 divise 0 pour que la relation soit bien définie sur $\mathbb{N}$ tout entier) ; si n divise m est m divise n, alors $n = m$ puisqu'on est rarement divisible par quelqu'un de plus grand (au sens usuel) que soi ; enfin, si n divise m et que m divise p, n divise bien p. Par contre, cet ordre n'est pas total (2 et 3 par exemple ne sont pas comparables).
- La même relation sur l'ensemble des puissances de 7 est toujours un ordre (évidemment), mais il vient maintenant total : 7^n divise 7^m si et seulement si $n \leqslant m$.
- La relation d'orthogonalité sur l'ensemble des vecteurs du plan n'est certainement pas une relation d'ordre, elle n'est même pas réflexive (ni transitive, d'ailleurs).
- La relation $\vec{u}R\vec{v} \Leftrightarrow \| \vec{u} \| \leqslant \| \vec{v} \|$ sur ce même ensemble n'est pas non plus une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique : si $\vec{u}R\vec{v}$ et $\vec{v}R\vec{u}$, on peut simplement conclure que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme, mais pas qu'ils sont égaux.
- La relation $zRz' \Leftrightarrow \text{Re}\,(z) \leqslant \text{Re}\,(z')$ sur $\mathbb{C}$ n'est pas non plus une relation d'ordre, deux complexes ayant même partie réelle n'étant en général pas égaux...
- L'ordre alphabétique sur les mots du dictionnaire est bien sûr une ordre total.
- La relation $(u_n)R(v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant v_n$ sur l'ensemble des suites réelles est bien un ordre, mais absolument pas total (pour prendre un exemple original, les suites de terme général $\cos n$ et $\sin n$ ne sont pas comparables pour cet ordre).

Exercice 2

Précisons les choses avant de répondre : admettons que nRm si n est divisible par m, et non le contraire (qui est toutefois tout autant une relation d'ordre !).

1. Avec cette convention, l'ensemble $\{1; 3; 4; 6\}$ a pour maximum 1 mais pas de minimum ; $\{2; 6; 8\}$ a pour maximum 2 et pas de minimum non plus, et $\{2; 3; 6\}$ a pour minimum 6 mais pas de maximum.
2. Un sous-ensemble fini admettra un maximum quand l'un de ses éléments divise tous les autres, ce qui se produit quand le pgcd des éléments de l'ensemble appartient à l'ensemble. De même, il admet un minimum si le ppcm de l'ensemble en fait partie **ou** si 0 est dans l'ensemble (0 étant bien sûr divisible par tout le monde).
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ a un minimum égal à 0 et un maximum égal à 1.

Exercice 3

Comparer deux réels se fait simplement en les mettant au même dénominateur, et pour deux nombres algébriques on peut s'en sortir en élevant au carré (ou au cube, ou plus...). Mais en général, comparer deux réels n'est absolument pas possible par des moyens calculatoires exacts. Par exemple, comparer π^4 et $\sqrt{9500}$ à la main n'a rien d'évident...

Exercice 4

Le sup de l'intersection de deux ensembles peut très bien ne pas exister du tout (quand leur intersection est vide). Mais même lorsqu'il existe, tout ce qu'on peut dire à son propos est qu'il sera inférieur ou égal au plus petits des sups de A et B (mais pas forcément égal à ce plus petit sup, par exemple avec $A = [0;3]$ et $B = [0;1] \cup [145;178]$, le sup de l'intersection vaut 1. Par contre, le sup de la réunion existe dès que A et B ont tous deux un sup, et il est bien égal au plus grand des deux. De même, le sup de $A + B$ est bien la somme des sups de A et de B.

Exercice 5

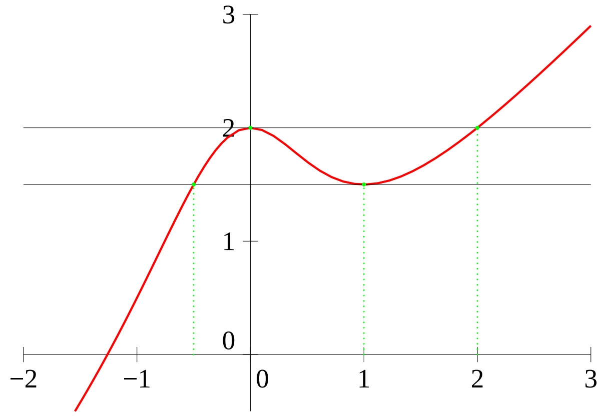
La relation est bien réflexive, puisque deux ensembles égaux sont en relation (c'est la première possibilité). Supposons désormais que ARB et BRA avec $A \neq B$. Soit alors $x \in A$ tel que $x \notin B$ (ou le contraire, ça ne change rien), les deux ensembles étant distincts, on a nécessairement $\forall b \in B$, $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$. Par antisymétrie de $\leqslant$, a est donc égal à tous les éléments de B. Or, B n'étant pas vide, x doit alors appartenir à B, ce qui contredit notre hypothèse. Les deux ensembles A et B sont donc bien égaux.

Enfin, si ARB et BRC, soit deux ensemble parmi les trois sont égaux (mais alors on a évidemment ARC), soit, en choisissant un éléments de B (il en existe au moins un), il est plus grand que tous les éléments de A et plus petit que tous ceux de C. Par transivité de $\leqslant$, tous les éléments de A sont alors plus petits que tous ceux de C, c'est-à-dire que ARC, ce qui prouve la transitivité de R.

Exercice 6

- $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ est bien réflexive $x^2 - x^2 = x - x = 0$, symétrique (si $x^2 - y^2 = x - y$, alors $y^2 - x^2 = y - x$, on change juste les signes des deux côtés), et transitive (si $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, par somme, $x^2 - z^2 = x - z$). La classe d'équivalence de x est constituée des y vérifiant $x^2 - y^2 = x - y$, soit $(x - y)(x + y - 1) = 0$, ce qui se produit quand $y = x$ ou $y = 1 - x$. Il y a une classe d'équivalence réduite à un seul élément : $\frac{1}{2}$, pour lequel les deux valeurs sont les mêmes ; et une infinité de classes à 2 éléments.
- $xRy \Leftrightarrow (x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, en posant $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$. Il est évident à partir de là que R est une relation d'équivalence. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, y est également dérivable, de dérivée $\frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 4)}{(x^2 + 1)^2}$. Elle change donc de sens de variation en 0 et 1, qui ont pour images respectives 2 et $\frac{3}{2}$. Cherchons l'autre antécédent de 2 par f : $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0$, donc 2 a également pour image 2 par f. De même, on a $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + \frac{1}{2}) = 0$, donc le second antécédent de $\frac{3}{2}$ par f est $-\frac{1}{2}$. Tout ça pour obtenir le tableau de variations et la courbe suivants :

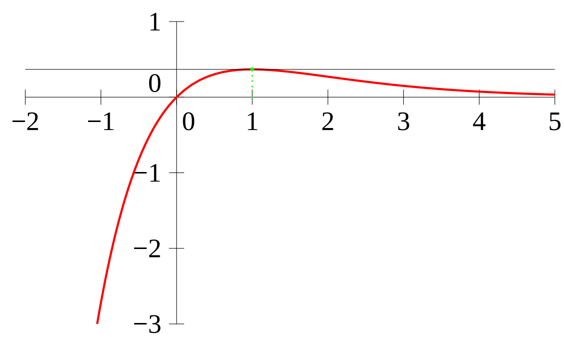
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$



Il y a donc deux classes d'équivalence pour la relation contenant deux éléments : $\{0;2\}$ et $\{-\frac{1}{2};1\}$, une infinité de classes contenant un seul élément (pour $x \in]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]2;+\infty[$) et encore un certain nombre contenant 3 éléments (à chaque fois un dans $]-\frac{1}{2};0[$, un dans $]0;1[$ et un dans $]1;2[$).

- $xRy \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ est du même type que la relation précédente, mais pour $g(x) = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$. Cette fonction a pour dérivée $(1-x)e^{-x}$ et pour limites $-\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$ (croissance comparée, d'où tableau et courbe :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$ 0



On a cette fois-ci un certain nombre de classes à un seul élément (si $x \in]-\infty;0]$ mais aussi pour $x = 1$) et aussi un paquet de classes à deux éléments, l'un appartenant à $]0;1[$ et l'autre à $]1;+\infty[$).

Exercice 7

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une bijection. On définit une relation R sur E par $xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) = y$.

1. Il suffit de prendre $n = 0$ pour obtenir xRx. Si xRy, on a donc $y = f^n(x)$, mais alors $x = f^{-n}(y)$, et on a yRx, donc R est symétrique. Enfin, si $y = f^n(x)$ et $z = f^p(y)$, on a $z = f^{p+n}(x)$, donc R est transitive.
2. Soit $x \in C$, alors comme $xRf(x)$ (une conséquence immédiate de la définition de R), on a aussi $f(x) \in C$, donc $f(C) \subset C$. Mais réciproquement, si $x \in f(C)$, $f^{-1}(f(x)) = xRf(x)$, donc $x \in C$. Finalement, $C = f(C)$.
3. Supposons donc $f(X) = X$, et soit $x \in X$, on veut montrer que si xRy, alors $y \in X$. Or cela se produit si $y = f^n(x)$, mais par une récurrence évidente sur n, on a pour tout entier positif n, $f^n(x)$ et $f^{-n}(x)$ qui appartiennent à X (c'est vrai pour $n = 0$, et en le supposant vrai pour un entier n, on a $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, donc $f^{n+1}(x)$ est image d'un élément de X par f, donc appartient à X ; de même pour $f^{-n-1}(x)$).

Exercice 8

La relation est manifestement réflexive et symétrique, et la transitivité ne pose aucun problème non plus : si $x+y=x'+y'$ et $x'+y'=x"+y"$, alors $x+y=x"+y"$. La classe d'équivalence d'un couple donné (a,b) est l'ensemble des (x,y) vérifiant $x+y=a+b$, soit $y=-x+(a+b)$, ce qui est l'équation d'une droite de pente -1 dans le plan. Les classes d'équivalence pour R sont toutes ces droites.

Exercice 9

Si R est une relation d'équivalence, elle est réflexive par hypothèse, et circulaire car si on a aRb et bRc, on a aRc, donc aussi cRa par symétrie. Réciproquement, si une relation R est réflexive est circulaire, elle est aussi symétrique, car si on a aRb, comme on a aussi bRb par réflexivité, on en déduit par circularité bRa. Enfin, elle est transitive puisque si on a aRb et bRc, on a cRa donc aRc par la symétrie qu'on vient de prouver.

Un exemple de relation circulaire qui ne soit pas d'équivalence (donc qui ne doit pas être réflexive) : sur l'ensemble à trois éléments $\{0;1;2\}$, la relation R qui ne contient que les trois relations $0R1$, $1R2$ et $2R0$.