Exercices sur les relations

PCSI 2 Lycée Pasteur

24 septembre 2007

Exercice 1

Déterminer si les relations suivantes sont ou non des relations d'ordre ; si elle le sont, dire s'il s'agit d'un ordre total :

- la relation $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$
- la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$
- la même relation sur l'ensemble des puissances de 7
- la relation d'orthogonalité sur l'ensemble des vecteurs du plan
- la relation $\vec{u} R \vec{v} \Leftrightarrow \| \vec{u} \| \leqslant \| \vec{v} \|$ sur ce même ensemble
- la relation $zRz' \Leftrightarrow \text{Re }(z) \leqslant \text{Re }(z')$ sur $\mathbb{C}$
- l'ordre alphabétique sur les mots du dictionnaire
- la relation $(u_n)R(v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ sur l'ensemble des suites réelles

Exercice 2

On considère la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$.

1. Déterminer le maximum et le minimum éventuels des ensembles suivants : $\{1; 3; 4; 6\}$; $\{2; 6; 8\}$; $\{2; 3; 6\}$.
2. À quelle condition un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ admet-il un max ? Un min ?
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier a-t-il un max ? Un min ? Si oui, les déterminer.

Exercice 3

On considère l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Comment fait-on habituellement pour comparer deux rationnels ? Deux nombres agébriques simples (par exemple $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ et $2\sqrt{2}+1$) ? Deux réels quelconques ?

Exercice 4

On considère deux parties A et B de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Que peut-on dire de $\sup(A \cap B)$? $\sup(A \cup B)$? On note $A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}$. Que vaut $\sup(A + B)$?

Exercice 5

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit une relation R sur $\mathcal{P}(E) \backslash \{\emptyset\}$ par $A\ R\ B$ si $A = B$ ou $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$. Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

Exercice 6

On définit les relations suivantes sur $\mathbb{R}$. prouver que ce sont des relations d'équivalence et en préciser les classes d'équivalence :

- $xRy \iff x^2 - y^2 = x - y$
- $xRy \iff (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)$
- $xRy \iff xe^y = ye^x$

Exercice 7

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une bijection. On définit une relation R sur E par $xRy \iff \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) = y$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Montrer que, si C est une classe d'équivalence pour R, $f(C) = C$.
3. Montrer que si un sous-ensemble non vide X de E vérifie $f(X) = X$, il est réunion de classes d'équivalences de R.

Exercice 8

On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation R par $(x, y)R(x', y') \iff x + y = x' + y'$. Justifier qu'il s'agit d'une classe d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence de R.

Exercice 9

Une relation R sur un ensemble E est dite circulaire si $(aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow (cRa)$. Montrer qu'une relation est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et circulaire. Donner un exemple de relation circulaire qui ne soit pas une relation d'équivalence.