# Exercices de trigonométrie

PCSI 2 Lycée Pasteur

18 septembre 2007

## Logique

**Exercice 1 :**
Donner la valeur de vérité et la négation des propositions suivantes :
- $(2+2=4) \wedge (1+1=3)$
- $(2+2=4) \vee (1+1=3)$
- $(2+2=4) \Rightarrow (1+1=3)$
- $(1+1=3) \Rightarrow (2+2=4)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$

**Exercice 2 :**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $I$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :
- $f$ est la fonction nulle.
- $f$ s'annule sur $I$.
- $f$ est à valeurs positives.
- $f$ est constante.
- $f$ est strictement croissante sur $I$.
- $f$ prend des valeurs arbitrairement grandes.

**Exercice 3 :**
On définit l'opérateur logique $\uparrow$ par $A \uparrow B = \rceil(A \wedge B)$. Montrer qu'on peut exprimer tous les opérateurs logiques du cours ($\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) en utilisant uniquement $\uparrow$.

## Ensembles

**Exercice 4 :**
Montrer que deux ensembles $A$ et $B$ sont égaux si et seulement si $A \cap B = A \cup B$.

**Exercice 5 :**
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. Écrire le plus simplement possible les ensembles $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$ et $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$

**Exercice 6 :**
Montrer que $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

**Exercice 7 :**
Décrire les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0;1\}))$.

**Exercice 8 :**
On définit la différence symétrique de deux ensembles par $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Montrer que $(A\Delta B = A \cap B) \Rightarrow A = B = \emptyset$.

## Applications

**Exercice 9 :**
On définit les applications $f, g \in \mathcal{F}(E,F)^2$, par $f - n) = 2n$, et $g(n) = \dfrac{n}{2}$ si $n$ est pair, $g(n) = \dfrac{n-1}{2}$ si $n$ est impair. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f$, $g$, $f \circ g$ et $g \circ f$.

**Exercice 10 :**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carré. Déterminer les images et les images réciproques des ensembles $[2;5]$ ; $[-4;1]$, $f([3;4])$.

**Exercice 11 :**
Montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective ssi $\forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$, et que $f : E \to F$ est surjective ssi $\forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$.

**Exercice 12 :**
Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Montrer l'équivalence suivante : $\exists f : E \to F$ injective $\Leftrightarrow$ $\exists g : F \to E$ surjective.

**Exercice 13 :**
Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que $f$ est bijective. Que vaut $f^{-1}$ ?

**Exercice 14 :**
Soit $E$ un ensemble et $A$, $B$ deux sous-ensembles de $E$. On note $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ l'application définie par $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$. À quelle condition sur $A$ et $B$ cette application est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

**Exercice 15 :**
Le but de ce dernier exercice (difficile !) est de démontrer le théorème suivant (théorème de Cantor-Bernstein) : si $E$ et $F$ ont deux ensembles tels qu'il existe une application $f : E \to F$ et une application $g : F \to E$ toutes deux injectives, alors il existe une bijection de $E$ vers $F$.

On pose pour cela $E_1 = E\backslash g(F)$, $F_1 = f(E_1)$, $E_2 = g(F_1)\backslash E_1$, $F_2 = f(E_2)$, $E_3 = g(F_2)\backslash(E_1 \cup E_2)$ etc. On définit enfin $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ et l'application $h : E \to F$ par $h_{|A} = f$ et $h_{|(E\backslash A)} = g^{-1}$. Vérifier que $h$ est bien définie et bijective.