Exercices sur les structures algébriques : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

3 novembre 2007

Exercice 1

Un groupe à un élément est un ensemble E constitué d'un seul élément e, et la lci $*$ est nécessairement définie par $e * e = e$. On vérifie sans difficulté que $(E, *)$ est bien un groupe.

Si E contient deux éléments, l'un doit être le neutre pour $*$, notons-le e, et notons l'autre x. On a donc $e * e = e$ et $e * x = x * e = x$. Si l'on veut de plus que x soit inversible, on doit nécessairement avoir $x * x = e$, et on vérifie que $(E, *)$ est alors un groupe.

Ajoutons un troisième élément y à notre ensemble, on a nécessairement $e * e = e$, $e * x = x * e = x$ et $e * y = y * e * y$. On ne peut avoir $x * x = x$ ni $x * x = y$, sinon $x * y$ devrait être égal à y, ce qui n'est pas possible si x est différent de e. On a donc $x * x = y$, puis $x * y = y * x = e$ et $y * y = x$. Cette loi est bien une loi de groupe.

Enfin, dans le cas de quatre éléments, on obtient en étudiant toutes les possibilités les quatre lois suivantes :

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	y	z	e
y	y	z	e	x
z	z	e	x	y

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

Les deux dernières sont en fait la même que la première où on a effectué une permutation sur le rôle joué par x, y et z.

Exercice 2

Il ne faut pas oublier de commencer par constater que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-èmes de l'unité est un sous-ensemble de $\mathbb{U}$. En effet, si $z^n = 1$, on a en particulier $|z|^n = 1$, donc $|z| = 1$ (dans $\mathbb{R}_+$, l'équation $x^n = 1$ a une seule solution). Ensuite, restent à faire les vérifications élémentaires : $\mathbb{U}_n$ contient 1, $\mathbb{U}_n$ est stable par produit (si $z^n = z'^n = 1$, alors $(zz')^n = z^n z'^n = 1$) et par inverse (si $z^n = 1$, $\frac{1}{z^n} = 1$), donc c'est bien un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{U}$.

Exercice 3

La loi $*$ est une lci commutative, possède un élément neutre qui est 0, et est associative : $x * (y * z) = (x * y) * z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$. Mais tous les réels ne sont pas inversibles : $x * y = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{x-1}$, donc 1 n'a pas d'inverse. On vérifie par contre facilement que $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ muni de $*$ est un groupe, et qu'il est même isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ par l'application $x \mapsto 1 - x$. En effet $1 - (x * y) = (1 - x)(1 - y)$.

Nous allons utiliser cette remarque pour calculer $x * x * \cdots * x$: $1 - x * x * \cdots * x = (1 - x)^n$, donc $x * x * \cdots * x = 1 - (1 - x)^n$ (ce qu'on peut également prouver par récurrence).

Exercice 4

On montre sans grande difficulté que $*$ est commutative (même si ce n'est pas indispensable), associative ($x * (y * x) = (x * y) * z = \dfrac{x + y + z + xyz}{xy + xz + yz}$), d'élément neutre 0, et tout élément x est inversible, d'inverse $-x$. Le plus difficile est en fait de prouver que la loi est bien une lci, c'est-à-dire de prouver que $]-1; 1[$ est stable par $*$. On peut le faire à la main : si $x < 1$ et $y < 1$, $(x - 1)(y - 1) = xy - x - y - 1 < 0$, donc $-(1 + xy) < x + y$, et en divisant par $1 + xy$ qui est positif, on obtient $-1 < \dfrac{x + y}{1 + xy}$. De même, en partant de $-1 < x$ et $-1 < y$, on obtient $\dfrac{x + y}{1 + xy} < 1$, donc il s'agit bien d'une loi de groupe. On peut également remarquer que $\mathrm{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[$ est une application bijective vérifiant $\mathrm{th}\,(x + y) = \mathrm{th}\,(x) * \mathrm{th}\,(y)$. On peut en déduire immédiatement qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes.

Exercice 5

Le plus simple est de faire un joli tableau de loi :

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_6	f_4	f_5	f_3	f_1
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1	f_6	f_5
f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_1	f_3
f_6	f_6	f_1	f_5	f_3	f_4	f_2

Pour obtenir tous les sous-groupes, le plus simple est de les construire petit à petit. On connait les sous-groupes triviaux : le groupe G tout entier et le sous-groupe réduit à l'élément neutre. Par ailleurs, tout sous-groupe contient f_1 qui est le neutre. Si on cherche un sous-groupe contenant f_1 et f_2, on voit que pour être stable par $\circ$ il doit aussi contenir $f_2 \circ f_2 = f_6$. On constate que $\{f_1; f_2; f_6\}$ est un troisième sous-groupe de G. Par contre si on ajoute f_4, f_5 ou f_6 à f_1 et f_2, on est obligé pour avoir stabilité d'ajouter toutes les autres fonctions. Remarquons ensuite que $\{f_1; f_3\}$ est un sous-groupe de G, mais que si on y ajoute une troisième fonction, on va à nouveau retomber sur le sous-groupe trivial G. De même, $\{f_1; f_4\}$ et $\{f_1; f_5\}$ sont des sous-groupes, et on n'en obtient pas d'autres. Le groupe G a donc un sous-groupe à un élément, trois sous-groupes à deux éléments et un à trois éléments, et lui-même est un sous-groupe à six éléments.

Exercice 6

Il suffit de vérifier que $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{x}{|x|} \times \dfrac{y}{|y|} = \dfrac{xy}{|xy|}$, ce qui est vrai. L'image de ce morphisme est $\{-1; 1\}$, et son noyau $\mathbb{R}_+^*$.

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme car $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$. Son image est $\mathbb{U}$ et son noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7

Comme $axa^{-1}aya^{-1} = a(xy)a^{-1}$, l'application est un mophisme de groupes. De plus, si $axa^{-1} = e$, alors $ax = a$, donc $x = e$, autrement dit le noyau de ce morphisme est réduit à l'élément neutre, l'application est donc injective. Comme de plus un élément y a toujours un antécédent, en l'occurence $a^{-1}ya$, elle est également surjective, donc bijective. C'est donc un isomorphisme de groupes, dont la réciproque est d'ailleurs $y \mapsto a^{-1}ya$.

Exercice 8

En effet, si H_1 et H_2 contiennent tous deux l'élément neutre, $H_1 \cap H_2$ aussi. De plus, si H_1 et H_2 sont stables par $*$ et que x et y appartiennent à la fois à H_1 et à H_2, alors $x * y$ appartient aussi à $H_1 \cap H_2$, qui est donc stable par produit. De même, $H_1 \cap H_2$ est stable par inverse, c'est donc un sous-groupe de G (remarquons au passage que la réunion de deux sous-groupes n'est en général absolument pas un sous-groupe).

On peut généraliser facilement le résultat précédent en montrant qu'une intersection quelconque de sous-groupes est toujours un sous-groupe. On a alors $C_G = \{x \in G \mid \forall y \in G, x*y = y*x\} = \bigcap\limits_{y \in G} C_y$, où $C_y = \{x \in G \mid xy = yx\}$. Or, C_y est toujours un sous-groupe (je vous laisse vérifier), donc C_G également.

Exercice 9

Il suffit de remarquer que tout élément est son propre inverse, donc en particulier, si x et y sont deux éléments de E, alors $(xy)^{-1} = xy$. Or, on sait que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, qui est ici égal à yx, donc le groupe est bien commutatif.

Exercice 10

La loi $\bigoplus$ est commutative, associative $(x \bigoplus y) \bigoplus z = x \bigoplus (y \bigoplus z) = x + y + z - 2)$, d'élément neutre 1, et tout élément x est inversible, d'inverse $x - 2$. C'est donc une loi de groupe. On a vu dans un exercice antérieur que $\bigotimes$ était une loi de groupe sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, mais cela pose un gros problème : les deux neutres sont les mêmes ! L'ensemble considéré n'est donc pas un anneau.

Exercice 11

Tout est très simple, il ne faut juste oublier aucune vérification : $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ contient 0 et 1, est stable par somme et par produit, et par opposé, c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 12

Le fait que l'ensemble des suites soit un anneau ne pose aucun problème. Les associativité et commutativité des deux lois découlent de celles des opérations similaires sur les réels, puisqu'on fait les sommes et produits terme à terme. L'élément neutre pour la somme est la suite nulle, et celui pour le produit est la suite constante égale à 1. Enfin, l'opposé d'une suite (u_n) est la suite $(-u_n)$. Les suites inversibles sont celles qui ne s'annulent jamais, on peut alors inverser terme à terme.

1. Les suites bornées forment un sous-anneau de cet anneau : contient les neutres, stable par opposition (si $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout n, on a $-M \leqslant u_n \leqslant -m$), par somme (il suffit de prendre la somme des bornes) et même par produit (c'est un peu plus compliqué à cause des changements de signes, mais en prenant le plus gros produit parmi les valeurs absolues des quatre possibles, c'est un majorant du produit des deux suites).
2. Les suites monotones ne forment pas un sous-anneau, ce n'est pas stable par somme (une croissante plus une décroissante, ça peut donner n'importe quoi).
3. Pour les suites convergentes, aucun problème, les stabilités découlent des propriétés sur les limites de suites.
4. Les suites périodiques forment aussi un sous-anneau : contient les neutres (une suite constante est périodique de période 1), stable par opposition (même période) et par somme et produit (le produit des deu périodes, par exemple, est alors une période).
5. Les suites divergeant vers $+\infty$ ne forment pas un sous-anneau, ce n'est pas stable par passage à l'opposé.

Exercice 13

Les deux lois Δ et $\cap$ sont internes, commutatives, associatives et disctributives l'une par rapport à l'autre. De plus, Δ possède un élément neutre qui est $\emptyset$, $\cap$ possède pour élément neutre E, et tout élément A de $\mathcal{P}(E)$ est inversible pour Δ, son inverse étant lui-même puisque $A\Delta A = (A\backslash A) \cup (A\backslash A) = \emptyset$. On est donc bien en présence d'un anneau.

Les éléments inversibles pour $\cap$ sont les parties A de E telles qu'il existe $B \subset E$ pour laquelle $A \cap B = E$. Ceci ne peut se produire que si $A = B = E$, donc le neutre est le seul élément inversible pour $\cap$. Pour que l'anneau soit intègre, il faudrait avoir $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, ce qui n'est pas le cas (il suffit de prendre A non vide tel que $\overline{A}$ est non vide, ce qu'on peut toujours trouver dans un ensemble comportant au moins deux éléments). Enfin, $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$ n'est pas un sous-anneau de E car il ne contient pas l'élément neutre pour l'intersection, bien qu'il soit lui-même un anneau.

Exercice 14

Un tel sous-corps doit forcément contenir tous les multiples de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$. de plus, il est stable par produit, donc contient $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, de même il contient 3 et $\sqrt{6}$. Remarquons qu'il contient alors $3 - 2 = 1$, donc tous les entiers. Par stabilité par somme, produit et inverse, on voit finalement qu'il doit contenir tous les réels de la forme $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Notons K l'ensemble des réels de cette forme, K contient 0 et 1, il est stable par somme (facile) et par opposé (facile aussi) et même par produit (car $\sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$. C'est donc un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Encore mieux, K est stable par inversion : $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ a pour inverse $a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6}$ si $aa' + 2bb' + 3cc' + 4dd' = 1$; $ab' + ba' + 3cd' + 3dc' = 0$; $ac' + ca' + 2bd' + 2db' = 0$ et $ad' + da' + cb' + bc' = 0$, et ce système admet une solution (unique) quelles que soient les valeurs de (a, b, c, d) non toutes nulles.

Exercice 15

Mettons l'équation sous la forme $(x - 3)(y - 2) = 6$, ce sera bien plus simple à résoudre, il suffit en effet de faire la liste des décompositions de 6 en produit de deux entiers. Il y en a 8 : 6×1 ; 3×2 ; 2×3 ; 1×6, et les quatre obtenues en mettant des signes $-$ partout, ce qui nous donne les huit couples de solutions suivants : $\{(9, 3); (6, 4); (5, 5); (4, 8); (2, -4); (1, -1); (0, 0); (-3, 1)\}$.

Exercice 16

Commençons par déterminer les triplets d'entiers positifs vérifiant la condition. Supposons $x \leqslant y \leqslant z$. On remarque alors que si $x \geqslant 4$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{4}$, donc on ne peut pas avoir de solution. Si $x=3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si $x=y=z=3$, ce qui nous donne une première solution. Si $x=2$, on ne peut choisir $y=2$, sinon $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$, on obtient une solution pour $y=3$ et une autre pour $y=4$ (qui sont les triplets $(2,3,6)$ et $(2,4,4)$), mais on ne peut avoir $y \geqslant 5$ sinon la somme devient à nouveau trop petite. Enfin $x=1$ ne peut convenir.

Supposons maintenant les trois entiers de signe quelconque. Si aucun d'eux ne vaut 1 ou -1 et qu'un au moins est négatif, la somme des trois ne peut atteindre 1. Les seules solutions sont donc obtenues pour $x=1$ (par exemple) et $y=-z$ (toutes les valeurs de y conviennent alors) ou $x=-1$, mais alors $y=z=1$, et on retombe sur une solution déjà obtenue. À permutation près, les solutions sont donc les triplets $\{(2;3;6);(2;4;4);(3;3;3);(1;y;-y) \mid y \in \mathbb{N}^*\}$.