Exercices sur les structures algébriques

PCSI 2 Lycée Pasteur

18 octobre 2007

Exercice 1

Décrire tous les groupes possibles à 1, 2, 3 ou 4 éléments.

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des racines n-èmes de l'unité forment un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice 3

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $x * y = x + y - xy$. Est-ce une loi de groupe ? Calculer $x * x * \cdots * x$ (n facteurs) en fonction de n et de x.

Exercice 4

On considère sur $]-1;1[$ la loi $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, montrer que $(]-1;1[, *)$ est un groupe commutatif. Montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 5

On considère l'ensemble constitué des six fonctions de $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ dans lui-même suivantes : $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_5(x) = 1 - x$ et $f_6(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Montrer qu'il s'agit d'un groupe pour la composition (écrire sa table). Déterminer tous ses sous-groupes.

Exercice 6

Montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ est un endomorphisme de groupes de $\mathbb{R}^*$. Déterminer son noyau et son image. Même question pour l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 7

Soit G un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $x \mapsto axa^{-1}$ est un isomoprphisme de groupes de G dans lui-même (on parle d'automorphisme de groupe).

Exercice 8

Soit $(G,*)$ un groupe et H_1 et H_2 deux sous-groupes de G. Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G. On note $C_G = \{x \in G \mid \forall y \in G, x * y = y * x\}$. Montrer que C_G est un sous-groupe de G (appelé centralisateur de G).

Exercice 9

Soit $(G,*)$ un groupe tel que $\forall x \in G$, $x * x = e_G$. Montrer que G est un groupe commutatif.

Exercice 10

On munit $\mathbb{R}$ des lois $\bigoplus$ et $\bigotimes$ de la façon suivante : $x \bigoplus y = x + y - 1$ et $x \bigotimes y = x + y - xy$. Cela en fait-il un anneau ?

Exercice 11

Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 12

Montrer que l'ensemble des suites réelles, muni de la somme et du produit terme par terme, est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles (pour le produit) ? Parmi les ensembles suivants, lesquels en sont des sous-groupes ou des sous-anneaux :

1. suites bornées
2. suites monotones
3. suites convergentes
4. suites périodiques
5. suites divergeant vers $+\infty$

Exercice 13

Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. En préciser les éléments neutres, les éléments inversibles (et leur inverse) pour chacune des deux lois. Cet anneau est-il intègre ? Si $F \subset E$, $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$ est-il un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 14

Déterminer le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $xy = 2x + 3y$.

Exercice 16

Déterminer tous les triplets d'entiers (x,y,z) vérifiant $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.