Exercices sur les fonctions usuelles : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

10 septembre 2007

Exercice 1 :

1. Commençons par remarquer que l'équation n'a un sens que si $x \geqslant 2$. L'équation est vérifiée si $2(x+1)^2(3x+5) = (6x-1)(x-2)^2$, soit $6x^3+22x^2+26x+10 = 6x^3-25x^2+23x-4$, ce qui donne $47x^2+3x+14=0$, équation qui n'a manifestement pas de racine réelle. Il n'y a donc pas de solution à l'équation proposée.
2. En posant $X = e^x$, on a $X^2-2X-3=0$, équation qui a pour racine évidente -1 et pour deuxième racine 3. Seule la racine positive est ici acceptable, donc l'unique solution à l'équation est $\ln 3$.
3. On peut mettre l'équation sous la forme $5^x(1-5)+2^{3x-1}=0$, ou encore $2^{3x-1}=4\times 5^x$. Il est temps de passer au ln : $(3x-1)\ln 2 = 2\ln 2 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, soit $x = \dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$.
4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=3$
5. En prenant l'exponentielle de base 10 de la deuxième équation, on obtient $xy = 10^4$. Les réels x et y sont donc solutions de l'équation $z^2-520z+10000=0$, de discriminant $270400-40000 = 230400 = 480^2$, donc $z = 260 \pm 240$. Les nombres cherchés sont 500 et 20.
6. La dernière équation se transforme en $x+y=z$, et la deuxième en $x+y+z=6$, donc $z=3$ et $y=3-x$. On obtient alors $2^x+2^{3-x}-7=0$, ou encore $2^{2x}-7\times 2^x+8=0$. L'équation $X^2-7X+8=0$ a pour solutions $X = \dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}$, donc $x = \log_2 \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ est la seule solution possible au problème, on a ensuite $y = 3-x$.

Exercice 2 :

Étudier les fonctions suivantes :

1. La fonction f est définie si $\dfrac{x-1}{3x-4} > 0$, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[$. Quand $x \to \pm\infty$, on a $\dfrac{x-1}{3x-4} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}} \to \dfrac{1}{3}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (\frac{1}{2}x - \ln 3) = 0$, donc $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \ln 3$ (ce qui implique accessoirement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).

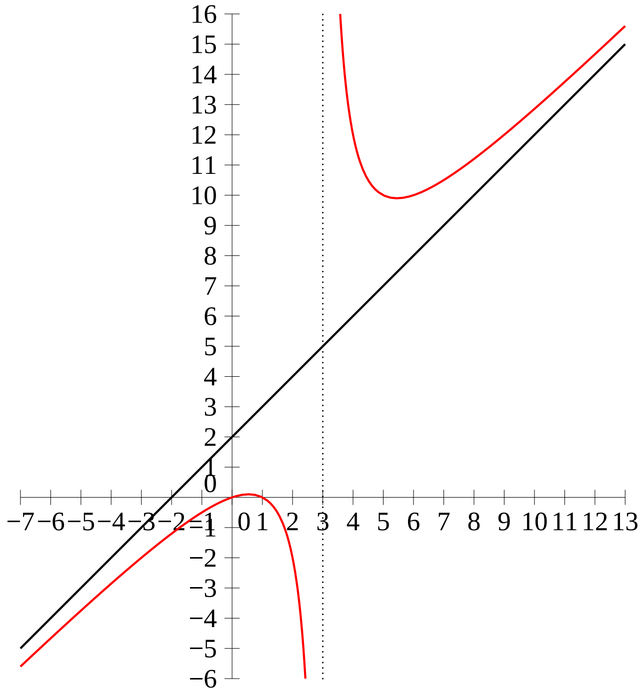
   La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3x-4-3x+3}{(3x-4)^2}\dfrac{3x-4}{x-1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(x-1)(3x-4)} = \dfrac{-3x^2+7x-2}{2(x-1)(3x-4)}$. Le numérateur s'annule pour

   $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \ln\left(\dfrac{x-1}{3x-4}\right)$

2. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Comme $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} + \dfrac{6}{x - 3} = x + 2 + \dfrac{6}{x - 3}$, f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ en $\pm\infty$. De plus, les limites en 3^- et 3^+ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Enfin, la dérivée de f est donnée par $f'(x) = 1 - \dfrac{6}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{(x-3)^2}$. Le discriminant du numérateur vaut 24, ses deux racines sont $3 - \sqrt{6}$ et $3 + \sqrt{6}$. On a donc un tableau de variations ressemblant à

x	$+\infty$		$3-\sqrt{6}$		3		$3+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$5-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{6}+5$	↗	$+\infty$

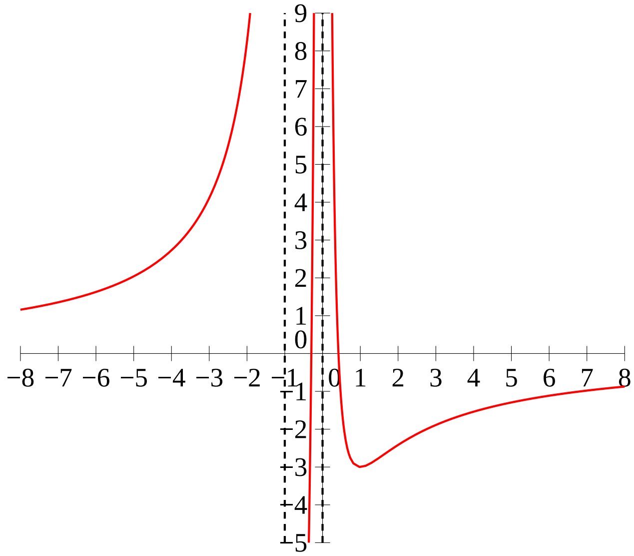
dont on tire la courbe suivante :



3. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$. Elle a pour limite 0 en $\pm\infty$, tend vers $+\infty$ en 0, vers $+\infty$ en -1^- et vers $-\infty$ en -1^+. Sa dérivée est $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{8}{(x+1)^2} = \dfrac{8x^3 - 2x^2 - 4x - 2}{x^3(x+1)^2} = \dfrac{2(x-1)(4x^2+3x+1)}{x^3(x-1)^2}$. Le dernier facteur du numérateur est toujours positif, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	0

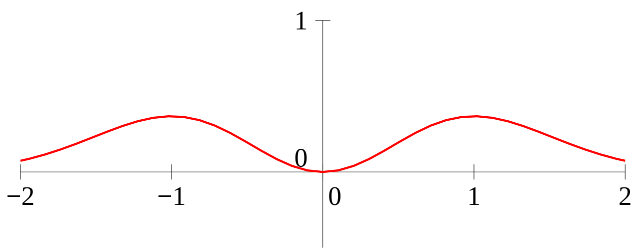
et la courbe :



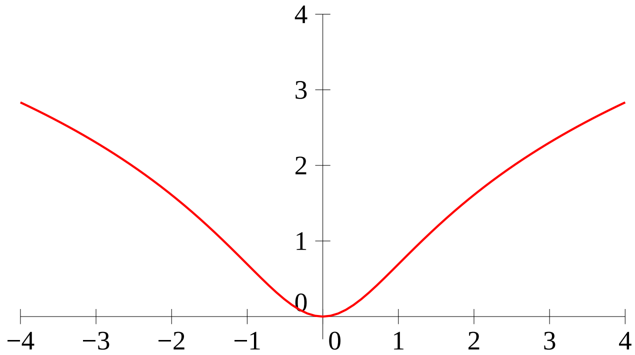
4. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour limite 0 en $\pm\infty$ par croissance comparée. On peut aussi remarquer que f est paire. Enfin, $f'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2} = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

et la courbe :



5. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + 1$ est toujours strictement positif. Elle est de plus paire, et a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$ et une branche parabolique de direction (Ox) de chaque côté par croissance comparée. De plus, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, sa courbe ressemble à ceci :



6. $f(x) = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$
7. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
8. $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$
9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a - x}}$ (a est une constante positive fixée)
10. $f(x) = \sqrt{x^2 \dfrac{3a - x}{a + x}}$ (a est une constante positive fixée)
11. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$

Exercice 3

Rien de bien passionnant, le plus simple est de partir de ce qui est à droite : $\text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \text{sh } (x+y)$. De plus, on a pour tout réel x, $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$, donc $(\text{ch } x + \text{sh } x)(\text{ch } y + \text{sh } y) = e^{x+y}$, d'où $\text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y = e^{x+y} - \text{sh } (x+y) = \text{ch } (x+y)$. Enfin, $\text{th } (x+y) = \dfrac{\text{sh } (x+y)}{\text{ch } (x+y)} = \dfrac{\text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y}{\text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y} = \dfrac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{ th } y}$ (en divisant par $\text{ch } x \text{ ch } y$).

Pour obtenir les formules de soustraction, on ne refait surtout pas les calculs, mais on remplace y par $-y$ et on utilise les diverses parités des fonctions hyperboliques : par exemple $\text{sh } (x - y) = \text{sh } x \text{ ch } (-y) + \text{ch } x \text{ sh } (-y) = \text{sh } x \text{ ch } y - \text{ch } x \text{ sh } y$. De même pour les autres formules.

Enfin, les formules de duplication ne sont que des cas particuliers obtenus en prenant $y = x$, par exemple $\text{sh } (2x) = \text{sh } (x + x) = \text{sh } x \text{ ch } x + \text{ch } x \text{ sh } x = 2\text{ch } x \text{ sh } x$.

Exercice 4

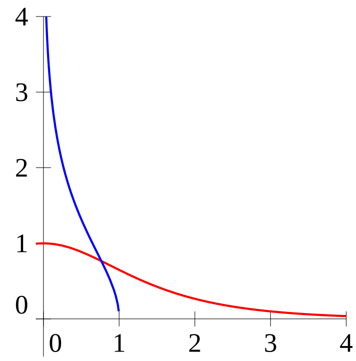
Si $\text{ch } x = y$, on a $e^x + e^{-x} = 2y$, d'où $e^{2x} + 1 = 2ye^x$, e^x est racine de l'équation du second degré $X^2 - 2yX + 1 = 0$, qui a pour racines (en passant par le discriminant réduit) $X = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. On ne conserve que la racine positive et on obtient $x = \text{argch } y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. De même, $\text{sh } x = y$ donne l'équation du second degré $X^2 - 2yX - 1 = 0$, dont la racine positive est $y + \sqrt{y^2 + 1}$, donc $\text{argsh } y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Enfin, $\text{th } x = y$ donne $e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$, d'où $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = \dfrac{1+y}{1-y}$, et on obtient $x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+y}{1-y}$.

Exercice 5

On peut tricher un peu en utilisant les formules de l'exercice 3 (sinon c'est un calcul un peu pénible mais pas difficile) : $\dfrac{2}{\text{th }(2x)} = \dfrac{2(1+\text{th }^2 x)}{2\text{th } x} = \dfrac{1}{\text{th } x} + \text{th } x$, dont la formule demandée découle immédiatement. On a ensuite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \text{th } (2^k x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\text{th }(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\text{th }(2^k x)}$, qui est une somme télescopique, égale à $\dfrac{2^n}{\text{th }(2^n x)} - \dfrac{1}{\text{th } x}$.

Exercice 6

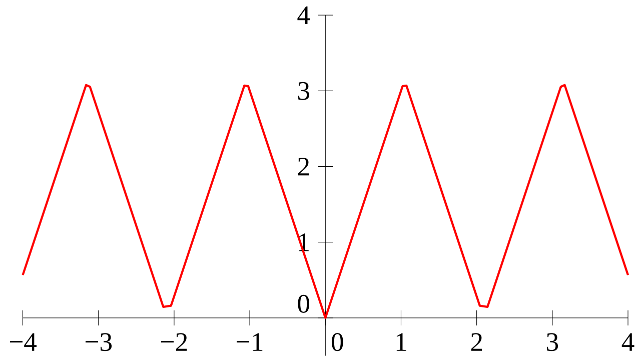
1. La fonction f est continue et dérivable, de dérivée $f'(x) = \dfrac{-\text{sh } x}{\text{ch }^2 x}$, qui est négative sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction f y est strictement décroissante. On peut aussi remarquer que f est l'inverse d'une fonction positive croissante, donc est décroissante. Comme elle est de plus continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+) =]0;1]$ (car $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$).
2. Une petite courbe :



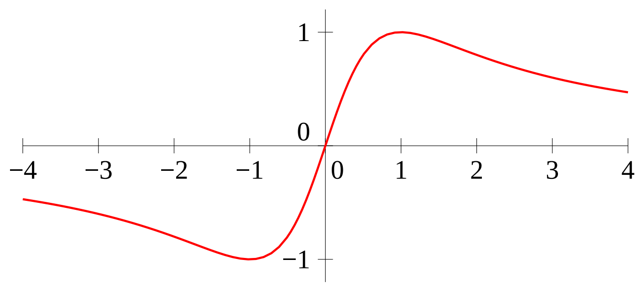
3. On a par définition $\dfrac{1}{\text{ch }(g(y))} = y$, donc $\text{ch }(g(y)) = \dfrac{1}{y}$, et comme $\text{sh } z = \sqrt{\text{ch }^2 z - 1}$ pour tout réel positif z, on en déduit la deuxième formule.
4. La fonction g est dérivable sur $]0;1[$ (la dérivée de f est nulle en 0, et $f(0) = 1$), de dérivée $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))} = -\dfrac{\text{ch }^2(g(y))}{\text{sh }(g(y))} = \dfrac{1}{y\sqrt{1-y^2}}$ en utilisant les formules de la question précédente.

Exercice 7

La fonction $f : x \mapsto \arccos(\cos(3x))$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car cos est à valeurs dans $[-1;1]$, intervalle sur lequel arccos est toujours définie), et surtout $\dfrac{2\pi}{3}$ périodique et paire car cos l'est. On peut donc se contenter de l'étudier sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Sur cet intervalle, on a $3x \in [0;\pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x$ (autrement dit, f est linéaire). Il suffit de compléter ensuite par symétrie et translations, ce qui donne la courbe suivante (la version donnée ici est très moche, mais l'allure est bonne) :



Pour étudier $g : x \mapsto \sin(2\arctan x)$, c'est différent : g est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, continue et dérivable partout, tend vers $\sin 2$ en $+\infty$. En fait, lorsque x croit de 0 à $+\infty$, $2\arctan x$ croit de 0 à 2 donc quand on compose par sin, on obtient une fonction croissante jusqu'à ce que $2\arctan x$ atteigne la valeur $\dfrac{\pi}{2}$, puis décroissante ensuite. Le maximum est atteint pour $x = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$, et vaut 1. De même, sur $\mathbb{R}_-$, g est décroissante sur $]-\infty; -1]$, et croissante ensuite. La courbe ressemble à ceci :



Exercice 8

Ca arrive même aux meilleurs de se tromper, l'énoncé de cet exercice comportait manifestement une erreur et j'ai beau me creuser la tête, je ne vois plus du tout ce que je voulais demander, donc on va le laisser gentiment tomber.

Exercice 9

Montrer que $\arctan a + \arctan b = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} + \varepsilon(a,b)$, où ε est une fonction simple, à déterminer.

Exercice 10

Il y a la méthode brutale : les deux fonctions $x \mapsto \arctan(\text{sh } x)$ et $x \mapsto \arccos \dfrac{1}{\text{ch } x}$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (pour la seconde, c'est du au faut que $\dfrac{1}{\text{ch } x}$ prend ses valeurs dans $]-1;1[$), de dérivées respectives $\dfrac{\text{ch } x}{1+\text{sh }^2 x}$ et $\dfrac{\text{sh } x}{\text{ch }^2 x}\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\text{ch }^2 x}}}$. Après simplifications, ces deux expressions sont égales à $\dfrac{1}{\text{ch } x}$, donc les deux fonctions diffèrent d'une constante. Comme elles prennent la même valeur en 0 (à savoir 0), elles coïncident sur $\mathbb{R}_+$, d'où la formule.

L'autre méthode est plus subtile : posons $y = \text{sh}\, x$ et $z = \arctan y$, on a donc $\text{ch}\, x = \sqrt{1+y^2}$, donc $\arccos \dfrac{1}{\text{ch}\, x} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 z}} = \arccos \sqrt{\cos^2 z} = z$ car $z \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a bien l'égalité voulue.

Exercice 11

Tentons de calculer la tangente de $4 \arctan \dfrac{1}{5}$ en utilisant la formule de duplication des tangentes : elle vaut $\dfrac{2\tan(2\arctan\frac{1}{5})}{1-\tan^2(2\arctan\frac{1}{5}}$, et $\tan(2\arctan\frac{1}{5}) = \dfrac{2\times\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$, donc $\tan(4\arctan\frac{1}{5}) = \dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \dfrac{120}{119}$. Or, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \arctan\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \dfrac{120}{118}$. Les deux nombres ont même tangente, et ils sont tous deux compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ (pour le premier, cela découle du fait que $\dfrac{1}{5} < \tan\dfrac{\pi}{8}$, donc ils sont égaux.