Exercices sur les fonctions usuelles

PCSI 2 Lycée Pasteur

10 septembre 2007

Logs, exps, puissances

Exercice 1 :
Résoudre les équations suivantes (dans $\mathbb{R}$) :

1. $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x-2)$
2. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
3. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
4. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$
5. $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array} \right.$
6. $\left\{ \begin{array}{c} 2^x + 2^y + 2^z = 15 \\ e^x e^y e^z = e^6 \\ \ln(3^x 3^y) = z \ln 3 \end{array} \right.$

Exercice 2 :
Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \ln\left(\dfrac{x-1}{3x-4}\right)$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{8}{x+1}$
4. $f(x) = x^2 e^{-x^2}$
5. $f(x) = \ln(x^2+1)$
6. $f(x) = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$
7. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
8. $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$
9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$ (a est une constante positive fixée)
10. $f(x) = \sqrt{x^2 \dfrac{3a-x}{a+x}}$ (a est une constante positive fixée)
11. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$

Fonctions hyperboliques et réciproques circulaires

Exercice 3
Démontrer les formules suivantes (analogues pour les fonctions hyperboliques des formules de trigo que vous connaissez bien) :

- $\text{sh }(x+y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y$ $\qquad \text{sh }(x-y) = \text{sh } x \text{ ch } y - \text{ch } x \text{ sh } y$
- $\text{ch }(x+y) = \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y$ $\qquad \text{ch }(x-y) = \text{ch } x \text{ ch } y - \text{sh } x \text{ sh } y$
- $\text{th }(x+y) = \dfrac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{ th } y}$ $\qquad \text{th }(x-y) = \dfrac{\text{th } x - \text{th } y}{1 - \text{th } x \text{ th } y}$
- $\text{sh }(2x) = 2\text{sh } x \text{ ch } x$
- $\text{ch }(2x) = \text{ch }^2 x + \text{sh }^2 x$
- $\text{th }(2x) = \dfrac{2\text{th } x}{1 + \text{th }^2 x}$

Exercice 4
Montrer que les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide de ln (partir par exemple de ch $x = y$ et en déduire argch (y)).

Exercice 5 Montrer que $\forall x \neq 0$, $\text{th } x = \dfrac{2}{\text{th }(2x)} - \dfrac{1}{\text{th } x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \text{th }(2^k x)$.

Exercice 6
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{\text{ch } x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle I à préciser.
2. Représenter les courbes de s et de sa réciproque g.
3. Montrer que $\text{ch }(g(y)) = \dfrac{1}{y}$ et $\text{sh }(g(y)) = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$ pour les valeurs de y pour lesquelles g est définie.
4. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de g.

Exercice 7
Étudier la fonction $x \mapsto \arccos(\cos(3x))$.
Étudier la fonction $x \mapsto \sin(2\arctan x)$.

Exercice 8
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y| > 1$, montrer que l'équation $z^x + e^{-x} = y(e^x + e^{-x})$ admet une unique solution réelle. Exprimer cette solution en fonction de y et étudier la fonction ainsi définie.

Exercice 9
Montrer que $\arctan a + \arctan b = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab} + \varepsilon(a,b)$, où ε est une fonction simple, à déterminer.

Exercice 10
Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\arctan(\text{sh } x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\text{ch } x}\right)$ de deux façons différentes.

Exercice 11
Montrer que $4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$ formule utilisée par John Machin (on ne rigole pas, c'est vraiment son nom) pour calculer 100 décimales de π en 1706.