Exercices sur les équations différentielles : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

12 octobre 2007

Exercice 1

1. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions de le forme $y_h(x) = Ke^{2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière à l'équation sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{2x}$. On a alors $y'(x) = (K'(x) + 2K(x))e^{2x}$, donc y_p est solution si $K'(x) = (\text{sh } x - 2x\text{ch } x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-x} - e^{-3x}}{2} - xe^{-x} - xe^{-3x}$, soit par exemple $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} - te^{-t} - te^{-3t}\ dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6} + [te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\ dt + \left[t\frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-3t}}{3}\ dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + xe^{-x} - e^{-x} + \frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{9} + A = \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{6x+1}{18}\right)e^{-3x} + A$, où A est une constante qu'on peut ignorer. Les solutions complètes sont donc les fonctions $y(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)e^{x} + \left(\dfrac{6x+1}{18}\right)e^{-x} + Ke^{2x}$.
2. Comme il faut diviser par t pour mettre l'équation sous forme usuelle, la résolution s'effectuera sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On a alors $y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{y}{t} = 0$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{\ln|t|} = \dfrac{K}{t}$, $K \in \mathbb{R}$ (on peut enlever la valeur absolue quitte à changer le signe de la constante sur $\mathbb{R}_-^*$). On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{t}$, d'où on tire $\dfrac{K'(t)}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. Une solution particulière est donc la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$, et les solutions générales de l'équation sont de la forme $y(t) = \dfrac{\sin t + K}{t}$. Remarquons que seule la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$, prolongée en 0 en posant $f(0) = 0$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-t}$, on recherche donc y_p sous la forme $K(t)e^{-t}$, ce qui nous donne $K'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^t}$, soit $K'(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$. Le membre de droite étant de la forme $\dfrac{u'}{u}$, on peut prendre comme primitive $K(t) = \ln(1+e^t)$. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto (\ln(1+e^t) + K)e^{-t}$, $K \in \mathbb{R}$.
4. Pour les solutions de l'équation homogène, cf l'équation précédente. Plutôt que d'utiliser la méthode de variation de la constante (qui amène un calcul de primitive par intégration par parties peu agréable), nous allons directement chercher une solution de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. On a donc $y_p'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)e^{2x}$, et y_p est solution, en factorisant par e^{2x}, si et seulement si $3ax^2 + (2a+3b)x + b + 3c = x^2 - 2x + 2$. On résout sans difficulté le système obtenu : $a = \dfrac{1}{3}$; $b = -\dfrac{8}{9}$ et $c = \dfrac{26}{27}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x} + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{8}{9}x + \dfrac{26}{27}\right)e^{2x}$.

5. Comme il faut diviser par $x\ln x$, on va résoudre sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$. On obtient donc $y' + \dfrac{y}{x\ln x} = 3x\ln x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{\ln|\ln|x||} = K\ln x$ (à un changement de constante près, cette formule est valable sur les deux intervalles de résolution). On cherche y_p de la forme $K(x)\ln x$, donc $K'(x)\ln x = 3x\ln x$, on peut prendre $K(x) = \dfrac{3}{2}x^2$ et les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto \left(\dfrac{3}{2}x^2 + K\right)\ln x$. Toutes les solutions se prolongent en solutions valables sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier, puisqu'elles valent toutes 0 pour $x = 1$.
6. On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}}$. On ne cherche pas de solution particulière puisqu'il y en a une qui nous saute aux yeux : la fonction constante égale à -1. Les solutions générales sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. Si on veut de plus $y(0) = 0$, il faut avoir $K - 1 = 0$, donc $K = 1$. La solution unique au problème de Cauchy posé est donc la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^3}{3}} - 1$.
7. On ne peut résoudre que sur l'intervalle $]-1;1[$. L'équation homogène $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\arcsin x}$. Encore une fois, la fonction constante égale à -1 est une solution particulière donc les solutions générales sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\arcsin x} - 1$.
8. On résout sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. L'équation homogène associée $y' + \dfrac{y}{2t} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : tKe^{-\ln\left|\frac{t}{2}\right|} = \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$. On cherche y_p sous la forme $\dfrac{K(t)}{\sqrt{|t|}}$, on obtient $\dfrac{K'(t)}{\sqrt{t}} = \dfrac{t^{n-1}}{2}$, donc $K'(t) = \dfrac{1}{2}|t|^{n-\frac{1}{2}}$, donc $\dfrac{|t|^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}$ convient, et les solutions générales de l'équation sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1} + \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$.
9. L'équation homogène associée a des solutions de la forme Ke^{3x}, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{3x}$, on obtient $K'(x)e^{3x} = x^2e^x + xe^{3x}$, donc $K'(x) = x^2e^{-2x} + x$. Une primitive de x^2e^{-2x} est obtenue par double intégration par parties : $\displaystyle\int_0^x t^2e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{t^2}{2}e^{-2t}\right]_0^x + \int_0^x te^{-2t}\,dt = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \left[-\frac{t}{2}e^{-2t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-2t}}{2}\,dt = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + \frac{1}{4}$. Une solution particulière de notre équation est donc la fonction $y_p(x) = \left(-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)e^x + \dfrac{x^2}{2}$ et les solutions générales sont les fonctions $y(x) = \left(-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)e^x + \dfrac{x^2}{2} + Ke^{3x}$. En 0, la valeur de y est $-\dfrac{1}{4} + K$, il faut donc choisir $K = \dfrac{5}{4}$ pour obtenir la solution au problème de Cauchy posé.

Exercice 2

Sur les intervalles précisés, aucun problème : l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto \dfrac{K}{x}$, et on cherche y_p sous la forme $\dfrac{K(x)}{x}$. On obtient $\dfrac{K'(x)}{x} = \dfrac{1}{x^2}$, soit $K(x) = \ln|x|$, donc les solutions générales sont de la forme $y(x) = \dfrac{K + \ln|x|}{x}$. Ces fonctions ne sont jamais prolongeables par continuité en 0, il n'y a donc pas de solution définir sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Posons donc $z = \sqrt{y}$ (ce qui est possible car y doit être à valeurs positives pour satisfaire l'équation), on a alors $y = z^2$, donc $y' = 2zz'$, d'où $2(1+t^2)zz' = 4tz^2 + 4tz$. On doit donc avoir, pour les points où z ne s'annule pas, $2(1+t^2)z' - 4tz = 4t$. Il y a une solution particulière évidente à cette équation qui est la fonction constante égale à -1, et l'équation homogène associée $z' - \dfrac{2t}{1-t^2}z = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{K}{1-t^2}$, donc on obtient $z(t) = \dfrac{K}{1-t^2} - 1$, et $y(t) = \left(\dfrac{K}{1-t^2} - 1\right)^2$. La fonction nulle est aussi solution de l'équation.

Exercice 4

Posons donc $z = \dfrac{1}{y}$, on a alors $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$, donc $-\dfrac{3z'}{z^2} + \dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{z^2} = 0$, soit en mettant tout au même dénominateur et en simplifiant par z $3z' - 3z = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^t, et la fonction constante égale à $-\dfrac{1}{3}$ est solution particulière évidente, donc $z(t) = Ke^t - \dfrac{1}{3}$. Parmi ces fonctions, seules celles obtenues pour $K \neq 0$ ne s'annulent pas et vonc donner des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, qui sont alors de la forme $y(t) = \dfrac{3}{K'e^t - 1}$, avec $K' \in \mathbb{R}_-$.

Exercice 5

En posant $u = \dfrac{y'}{y}$, on a $u' = \dfrac{y''y - y'^2}{y^2}$, donc l'équation devient $y^2(u' \sin^2 x + 1) = 0$. La fonction y n'ayant pas trop le droit de s'annuler pour que notre changement de variables soit valable, on a $u'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, soit $u(x) = \dfrac{1}{\tan x} + K$. On en déduit que y est solution de l'équation différentielle $y' - \left(\dfrac{1}{\tan x} + K\right) y = 0$, donc les solutions sont de la forme $y(x) = L \sin x e^{-Kx}$.

Exercice 6

Il faut changer légèrement l'énoncé pour mettre $y(0) = 0$ au lieu de $y(0) = 1$, comme cela on reconnait que la fonction y est la fonction tangente. Par la méthode d'Euler avec pas $\dfrac{1}{4}$, on a $y'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation x, donc $y(\frac{1}{4}) \simeq \frac{1}{4}$, puis $y'(\frac{1}{4}) \simeq \dfrac{17}{16}$ etc. En fait, en notant $u_k = f(\frac{k}{n})$, en prenant comme pas $\dfrac{1}{n}$, on a $u_{k+1} = \dfrac{1}{n}(u_k^2 + 1) + u_k$. Pour $n = 4$, on a donc $u_1 = \dfrac{1}{4}$, $u_2 = \dfrac{17}{16}$, $u_4 \simeq 1.255$. Pour $n = 10$, on a $u_1 = \dfrac{1}{10}$, $u_2 = \dfrac{201}{1000}$ puis $u_{10} \simeq 1.396$. Sachant que $\tan 1 \simeq 1.557$, les approximations ne sont pas vraiment extrêmement satisfaisantes.

Exercice 7

1. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto A\cos(2t) + B\sin(2t)$. On cherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, on a donc $y_p'' = 2a$, y_p est solution si $4ax^2 + 4bx + 4c + 2a = x^2 - x + 1$, soit $a = \dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{1}{8}$. on obtient finalement comme solutions générales les fonctions $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}$.
2. Les solutions homogènes sont de la forme $y(x) = A + Be^{-x}$ (c'est une fausse équation du second ordre, on a en fait une équation du premier ordre en y'), il faut chercher une solution

particulière de la forme $y_p(x) = (ax^2+bx+c)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x$, et $y_p''(x) = (ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c))e^x$. Cette fonction est solution si, après simplification par e^x, $2ax^2+(6a+2b)x+2a+3b+2c = 4x^2$, ce qui nous donne $a=2$, $b=-6$ et $c=7$. On a donc des solutions générales de la forme $y(x) = A+Be^{-x}+(2x^2-6x+7)e^x$. Si on impose de plus $y(0) = A+B+7 = e$ et $y'(0) = -B+1 = 0$, on obtient $B=1$ et $A = e-8$, et la solution est bien unique.

3. L'équation homogène a pour équation caractéristique $r^2+r+2=0$, dont le discriminant est $\Delta = 1-8 = -7$, et les solutions $r_1 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{2}$, et $r_1 = -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{7}}{2}$. Les solutions sont donc de la forme $y_h(x) = (A\cos(\frac{\sqrt{7}x}{2})+B\sin(\frac{\sqrt{7}x}{2}))e^{-\frac{x}{2}}$. Pour la solution particulière, on va chercher sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$ et $y_p''(x) = (ax+2a+b)e^x$, qui est solution si $4ax+3a+4b = 8x+1$, soit $a=2$ et $b=-\frac{5}{4}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (A\cos(\frac{\sqrt{7}x}{2})+B\sin(\frac{\sqrt{7}x}{2}))e^{-\frac{x}{2}}+(2x-\frac{5}{4})e^x$.
4. Ici, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ae^x+Be^{-x}$. Pour la solution particulière, utilisons le principe de superposition : comme $\text{sh}\ x = \frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}$, on va chercher une solution particulière avec second membre $\frac{e^x}{2}$, puis $\frac{e^{-x}}{2}$. Dans les deux cas, l'exposant de l'exponentielle est racine de l'équation caractéristique, il faut donc prendre un polynome de degré 1. Posons donc $y_1(x) = (ax+b)e^x$, on a $y_1''(x) = ax+2a+b)e^x$, et y_1 est solution pour $\frac{e^x}{2}$ si $a = \frac{1}{4}$ (et on prend par exemple $b=0$) donc $y_1(x) = \frac{1}{4}xe^x$. De même, on obtient $y_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$, donx en faisant la différence des deux, une solution particulière de l'équation complète est $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}x\text{ch}\ x$. Finalement, nos solutions de l'équation complète sont les fonctions $y(x) = Ae^x+Be^{-x}+\frac{1}{2}x\text{ch}\ x$.
5. L'équation caractéristique a pour racines évidentes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ae^t+Be^{2t}. Il faut chercher y_p de la forme $(at^3+bt^2+ct+d)e^t$, donc $y_p'(t) = (at^3+(3a+b)t^2+(2b+c)t+c+d)e^t$ et $y_p''(t) = at^3+(6a+b)t^2+(6a+4b+c)t+2b+2c+d)e^t$. Cette fonction est solution si $(a-3a+2a)t^3+(6a+b-9a-3b+2b)t^2+(6a+4b+c-6b-3c+2c)t+2b+2c+d-3c-3d+2d = -3t^2+10t-7$, soit $-3at^2+(6a-2b)t+2b-c = -3t^2+10t-7$. On obtient $a=1$, $b=-2$ et $c=3$, donc les solutions de l'équation complète sont de la forme $y(t) = (t^3-2t^2+3t+A)e^t+Be^{2t}$.
6. L'équation caractéristique r^2-2r+5 a pour discriminant $\Delta = 4-20 = (4i)^2$ et pour racines $r_1 = 1+2i$ et $r_2 = 1-2i$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto (A\cos(2t)+B\sin(2t))e^t$. Pour la solution particulière, on va en chercher une de l'équation $y''-2y'+5y = 4e^te^{2it} = 4e^{(1+2i)t}$ sous la forme $y_p(t) = (at+b)e^{(1+2i)t}$. On a donc $y_p'(t) = ((a+2ia)t+b+2ib+a)e^{(1+2i)t}$ et $y_p''(t) = ((a+4ia-4a)t+b+2ib+a+2ib-4b+2ia+a+2ia)e^{(1+2i)t}$. On a une solution si $(a+4ia-4a-2a-4ia+5a)t-3b+4ib+2a+4ia-2b-4ib-2a+5b = 4$, soit $a=-i$ (quelle simplification spectaculaire !), donc une solution particulière est la fonction $y_p(t) = -ite^{(1+2i)t} = -ie^t(\cos(2t)+\sin(2t))$. Pour obtenir une solution particulière de notre équation initiale, il suffit de prendre la partie imaginaire de la précédente : $\widetilde{y_p}(t) = -t\cos(2t)e^t$. On obtient finalement pour solutions de l'équation complète $y(t) = ((A-t)\cos(2t)+B\sin(2t))e^t$.

Exercice 8

On pose donc $y(x) = z(\ln x)$, d'où $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$ et $y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x)+\frac{1}{x^2}z''(\ln x)$. L'équation devient alors $-z'(\ln x)+z''(\ln x)+3z'(\ln x)+z(\ln x) = \frac{1}{x^2}$, soit en posant $t = \ln x$, $z''+2z'+z = e^{-2t}$. L'équation caractéristique associée a pour racine double -1, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $z_h(t) = (A + Bt)e^{-t}$, et une solution particulière sera de la forme Ke^{-2t}, avec $4K - 4K + K = 1$, donc $K = 1$ convient, soit $z_p(t) = e^{-2t}$. On a donc comme solutions générales les fonctions $z(t) = (A + Bt)e^{-t} + e^{-2t}$, d'où on tire $y(x) = \frac{A + B\ln x}{x} + \frac{1}{x^2}$. En imposant $y(1) = y'(1) = 0$, on a $A + 1 = -A + B - 2 = 0$, d'où $A = -1$ et 1. La seule fonction solution de ce problème est donc la fonction $x \mapsto \frac{x\ln x - x + 1}{x^2}$.

Exercice 9

Comme $f'(x) = 2f(-x) + x$, f' est elle-même dérivable, donc f est deux fois dérivable. Dérivons donc l'équation, on obtient $f''(x) = -2f'(-x) + 1 = -2(2f(x) - x) + 1 = -4f(x) + 2x = 1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentille $f'' + 4f = 2x + 1$, qui se résout sans difficulté : les solutions homogènes sont de la forme $A\cos(2x) + B\sin(2x)$ et une solution particulière évidente est la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{4}$, donc $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Exercice 10

Commençons par remarquer qu'en prenant $x = y = 0$, on a $2f(0) = 2f(0)^2$, donc $f(0)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Mais si $f(0) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$, $2f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle. pour la suite, on peut supposer que $f(0) = 1$. Fixons désormais y et dérivons par rapport à x, on obtient $f'(x + y) + f'(x - y) = 2f(y)f'(x)$, puis en dérivant à nouveau $f''(x + y) + f''(x - y) = 2f(y)f''(x)$. Mais cela reste vrai en échangeant le rôle de x et de y, donc on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, soit en posant $y = 0$, $f''(x) = Kf(x)$, avec $K = f''(0)$. Si $K = 0$, les solutions possibles sont de la forme $f(x) = ax + 1$, et seule la valeur $a = 0$ permet de vérifier l'équation fonctionnelle de départ, donc f est constante égale à 1. Si $K > 0$, f est de la forme $A\mathrm{sh}\,(\sqrt{K}x) + B\mathrm{ch}\,(\sqrt{K}x)$. La valeur en 0 impose $B = 1$ puis on constate que seul $A = 0$ permet de vérifier l'équation fonctionnelle, donc $f(x) = \mathrm{ch}\,(\sqrt{K}x)$. De même, si $K < 0$, on obtient une seule solution possible : $f(x) = \cos(-\sqrt{K}x)$.