

Exercices sur les équations différentielles

PCSI 2 Lycée Pasteur

12 octobre 2007

Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$.
2. $ty' + y = \cos t$.
3. $y' + y = \frac{1}{1 + e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.
6. $y' + x^2 y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
7. $\sqrt{1 - x^2} y' - y = 1$.
8. $2ty' + y = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
9. $y' - 3y = x^2 e^x + x e^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.

Exercice

On cherche les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $x^2 y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . Conclure.

Exercice

Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{y}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice

Déterminer les fonctions y définies sur \mathbb{R} , ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \frac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Riccati.

Exercice

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2) \sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \frac{y'}{y}$).

Exercice

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 1$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \frac{1}{4}$, puis $h = \frac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$.
4. $y'' - y = \operatorname{sh} x$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice

On considère l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$, qu'on cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* . En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z . En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).