Exercices sur les ensembles finis

PCSI 2 Lycée Pasteur

4 octobre 2007

Récurrences

Exercice 1
Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 2
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{4^n}{n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n$.

Exercice 3
On définit la suite réelle u_n par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Conjecturer puis prouver une formule donnant la valeur de u_n.

Exercice 4
Montrer par récurrence que tout entier supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme $5a + 7b$, avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 5
Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Cardinaux

Exercice 6
Soient A et B deux ensembles finis. Calculer les cardinaux de $A \backslash B$ et $A \Delta B$ en fonction de ceux de A, B et $A \cap B$ (on rappelle que $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$).

Exercice 7
Démontrer la formule donnée en remarque dans le cours pour le cardinal de $A \cup B \cup C$. Démontrer ensuite la formule de Poincaré : $card(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n} card(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

Exercice 8
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre de couples (X, Y) de sous-ensembles de E tels que $X \subset Y$.

Exercice 9
Déterminer le nombre d'applications f de $\{1; \dots; p\}$ dans $\{1; \dots; n\}$ vérifiant les conditions suivantes :

- f est strictement croissante.
- f est croissante.
- $f(i+1) > f(i) + 1$ pour tout $i \leqslant p$.

Calculs de sommes et de produits

Exercice 10
Déterminer un polynome P de degré 4 tel que $P(X+1)-P(X)=X^3$. En déduire une autre méthode pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 11
Calculer à l'aide de sommes télescopiques $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 12
Calculer les doubles sommes $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$ et $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}$

Exercice 13
Calculer les produits $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})$ et $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$.

Exercice 14
Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{\substack{(m,n,k)\in\mathbb{N}^3 \\ m+n+k=p}} mnk$.

Combinatoire

Exercice 15
Calculer le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT.

Exercice 16
Donner une expression simple des sommes suivantes : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$; $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$; $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 17
On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.
- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 18
Dans un ensemble personnes se trouvent a hommes et b femmes. En considérant le nombre d'ensembles de n personnes qu'on peut constituer dans ce groupe, montrer la formule de Vandermonde : $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.