Exercices sur les complexes : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

19 septembre 2007

Exercice 1

Pour le premier, on multiplie par le conjugué du dénominateur : $z_1 = \dfrac{(3+5i)(5+3i)}{25+9} = \dfrac{34i}{34} = i$, ce qu'on pouvait aussi constater directement.

Le second est un simple développement : $z_2 = (2-i)^3 = 8 - 3 \times 4i + 3 \times (-2) + i = 2 - 11i$.

Pour le troisième, c'est du classique : $z_3 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$.

Enfin, pour le dernier, on a intérêt à mettre sous forme trigonométrique : $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, donc $z_4 = \left(2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{11} = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{11} = 2^{11}e^{-\frac{11\pi}{3}} = 2048\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1024 + 1024\sqrt{3}i$.

Exercice 2

Commençons par simplifier ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse : $\dfrac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i} = \dfrac{(2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i)(2+i)}{4+1} = \dfrac{4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1+(4\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3})i}{5} = 1+\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc élevé à la puissance 17 on obtient $2^{17}e^{i\frac{17\pi}{3}} = 2^{17}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

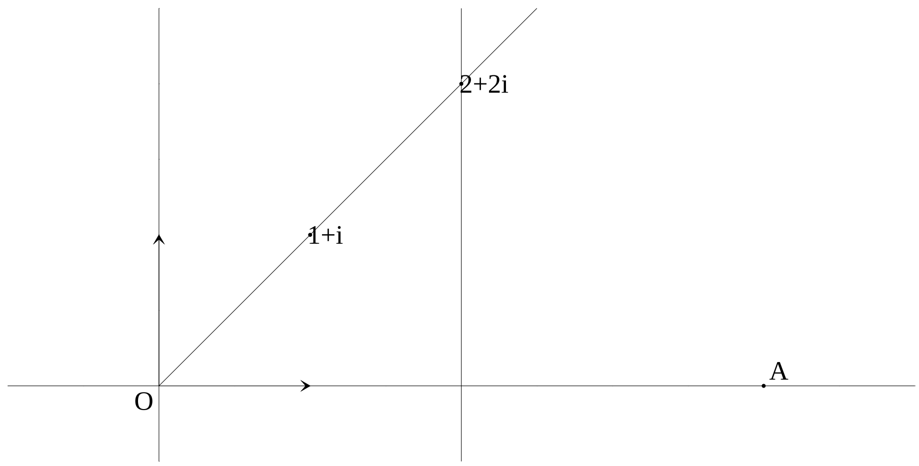
Exercice 3

- $\sqrt{3} + i = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $(\sqrt{3}+i)^{-1} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et les racines cubiques de $\sqrt{3}+i$ sont $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{i\frac{\pi}{18}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{i\frac{13\pi}{18}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{i\frac{25\pi}{18}}$.
- $1 + j = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2\cos\dfrac{\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $(1+j)^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et ses racines cubiques sont $e^{i\frac{\pi}{9}}$, $e^{i\frac{7\pi}{9}}$ et $e^{i\frac{13\pi}{9}}$.
- $\dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \dfrac{(i+\sqrt{3})^2}{1+3} = \dfrac{2+2i\sqrt{3}}{-4} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $a^{-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et les racines cubiques de a sont $e^{-i\frac{\pi}{9}}$, $e^{-i\frac{7\pi}{9}}$ et $e^{-i\frac{13\pi}{9}}$.

Exercice 4

On peut s'en sortir uniquement par le calcul : si $|z| = |z-4|$, en élevant au carré, on obtient $z\overline{z} = (z-4)(\overline{z}-4) = z\overline{z} - 4(z+\overline{z}) + 16$, donc $16 = 4(z+\overline{z}) = 8\mathrm{Re}\ z$, et $\mathrm{Re}\ z = 2$. Ensuite, en supposant $z \neq 0$, $\arg z = \arg(z+1+i) \Leftrightarrow \arg\dfrac{z+1+i}{z} = 0$, donc $\dfrac{z+1+i}{z} = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit $z + 1 + i = \lambda z \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{\lambda - 1}$. Le seul multiple réel de $1+i$ ayant pour partie réelle 2 étant $2(1+i) = 2+2i$ (qui correspond à $\lambda = \dfrac{3}{2}$), la seule valeur de z convenable est donc $2+2i$.

Il est également possible de raisonner géométriquement. Notons M l'image de z dans la plan, et A celle de 4, alors la condition $|z| = |z-4|$ peut s'écrire sous la forme $|z_M - z_O| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow AM = OM$. Le point M doit donc appartenir à la médiatrice du segment $[OM]$, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 2$ dans le plan. De plus deux nombres complexes ont même argument si leurs images sont situées sur une même demi-droite d'origine 0. Ici, l'image de $z+1+i$ étant l'image de M par la translation de vecteur d'affixe $1+i$, il ne peut être aligné avec O et M que si le vecteur d'affixe $1+i$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$, donc M se situe sur la droite passant par le point d'affixe $1+i$. Cette droite intersecte celle d'équation $x = 2$ en un seul point, d'affixe $2+2i$, qui est donc l'unique solution du problème posé.



Exercice 5

On a $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{U}$. De plus, on peut mener un calcul très similaire à celui de l'exercice précédent : si $|z| = |z-1|$, $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$, et on obtient $\text{Re}\,(z) = \frac{1}{2}$. Les deux seuls points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $\frac{1}{2}$ sont $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, qui sont donc les deux solutions du problèmes posé.

Exercice 6

On peut traduire l'hypothèse par le fait que $\frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R}$ (si $z = 0$ ou $z = 1$, les points seront de toute façon alignés puisque confondus). On a donc $\frac{z^2(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z(z+1) \in \mathbb{R}$. Posons $z = a + ib$, on a alors $z(z+1) = a^2 + a - b^2 + i(2ba + b)$. On obtient donc la condition $b(2a+1) = 0$, soit $b = 0$ ou $a = -\frac{1}{2}$. L'ensemble recherché est donc la réunion de la droite réelle et de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ (ou en terme de complexes l'ensemble des complexes réels ou de partie réelle égale à $-\frac{1}{2}$).

Exercice 7

1. On résout comme dans le cas d'une équation réelle. Le discriminant vaut $\Delta = i^2 + 8i - 24 = 8i - 25$. On a $|\Delta| = \sqrt{689}$, donc $\Delta = \sqrt{689}e^{i\theta}$, avec $\cos\theta = -\frac{25}{\sqrt{689}}$ et $\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{689}}$, et les

deux racines de l'équation sont $z_1 = \dfrac{i + \sqrt[4]{689}e^{i\frac{\theta}{2}}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{i - \sqrt[4]{689}e^{i\frac{\theta}{2}}}{4}$.

2. En multipliant par z^2, on obtient $z^4 = -|z|^4$. Un complexe est égal à l'opposé de son mudule si et seulement si il est réel négatif, donc $z^4 \in \mathbb{R}^-$, ou encore $\arg(z^4) \equiv \pi[2\pi]$, d'où $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. L'ensemble des solutions est la réunion des deux bissectrices des axes dans le plan complexe (on pouvait également résoudre en posant simplement $z = a + ib$).

3. Deux méthodes : on pose $Z = z^2$ puis on résout l'équation de degré 2, dont le discriminant est le carré de $-\sin\theta$, et on obtient les solutions. Ou on remarque que l'équation peut s'écrire $z^4 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^2 + e^{i\theta}e^{-i\theta}$, équation de type « somme-produit », et on en déduit que $z^2 = e^{i\theta}$ ou $z^2 = e^{-i\theta}$. Dans les deux cas, on obtient ensuite $\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\theta}{2}}, e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}, e^{-i\frac{\theta}{2}}, e^{-i(\frac{\theta}{2}+\pi)}\}$

4. On peut ruser (une fois de plus) en remarquant que $-5|z^2| + 2$ est un réel, donc z^2 soit être réel ce qui ne se produit que si $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$. Dans le premier cas, il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 5x^2 + 2 = 0$, soit $x^2 = 1$, donc $x = \pm 1$. Dans le deuxième cas, $z = ib$, avec $-3b^2 - 5b^2 + 2 = 0$, soit $b^2 = \dfrac{1}{4}$, donc $z = \pm\dfrac{i}{2}$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$. Encore une fois, on s'en sort très bien de façon purement algébrique, en posant $z = a + ib$.

5. Il s'agit de calculer les racines quatrièmes d'un nombre complexe, ce pour quoi on sait qu'on peut procéder de manière algébrique ou trigonométrique. Même si je vous ai plutôt conseillé en cours de faire de façon trigonométrique en général, on obtient ici des valeurs exactes par la calcul algébrique. Commençons par calculer les racines carrées de $24i - 7$: soit $Z = x + iy$ un nombre complexe, si $Z^2 = 24i - 7$, on aura $|Z^2| = x^2 + y^2 = |24i - 7| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$, et $\mathrm{Re}\,(Z^2) = x^2 - y^2 = -7$, dont on déduit $2x^2 = 25 - 7 = 18$ et $2y^2 = 25 + 7 = 32$. On a donc $x = \pm 3$ et $y = \pm 4$. Comme de plus $\mathrm{Im}\,(Z^2) = 2xy = 24$, x et y sont de même signe, ce qui donne les deux racines $Z_1 = 3 + 4i$ et $Z_2 = -3 - 4i$. Restent à calculer les racines carrées de ces deux complexes, par la même méthode. Elle ont chacune pour module 5, dont en posant $z = a + ib$, on obtient dans le premier cas $2a^2 = 5 + 3 = 8$ et $b^2 = 5 - 3 = 8$, et dans le deuxième cas $2a^2 = 2$ et $2b^2 = 8$. Comme a et b sont de même signe dans le premier cas et de signe contraire dans le deuxième, on obtient quatre racines : $\mathcal{S} = \{2+i, -2-i, 1-2i, -1+2i\}$.

6. En multipliant les deux membres de l'équation par z (remarquons au passage que 0 est une solution qu'il faudra penser à rajouter si elle n'apparait pas dans nos calculs), on obtient $|z|^2 = z^{n+1}$. En particulier, z^{n+1} est un nombre réel positif, ce qui implique $\arg z^{n+1} \equiv 0[2\pi]$, donc $\arg z \equiv 0\left[\dfrac{2\pi}{n+1}\right]$. De plus, en prenant le module de cette même équation, on a $|z| = |z|^n$, ce qui ne peut se produire que si $z = 1$, sauf dans le cas où $n = 1$, où l'égalité de modules est toujours vérifiés. Dans ce dernier cas, l'équation se réduit en fait à $z = \overline{z}$, dont les solutions sont tous les réels. Si $n > 1$, la combinaisons des deux informations obtenues nous montre que les solutions sont les racines $n+1$-èmes de l'unité, auxquelles on ajoute 0.

7. Cherchons donc la racine réelle en posant $z = x \in \mathbb{R}$. On doit avoir $4ix^3 + 2x^2 + 6ix^2 - 5x - 4ix + 3 - 21i = 0$. En particulier, la partie réelle du membre de gauche étant nulle, on a $2x^2 - 5x + 3 = 0$, équation qui a pour solution évidente 1, et pour deuxième solution $\dfrac{3}{2}$ (en effet, le produit des deux solutions vaut $\dfrac{3}{2}$). Si $x = 1$, la partie imaginaire du membre de gauche de l'équation vaut -15, donc 1 n'est pas solution. Par contre, si $x = \dfrac{3}{2}$, elle vaut $4 \times \dfrac{27}{8} + 6 \times \dfrac{9}{4} - 4 \times \dfrac{3}{2} - 21 = 0$, donc il s'agit bien d'une racine de l'équation. On peut donc factoriser cette équation par $z - \dfrac{3}{2}$, ce qui nous donne $\left(z - \dfrac{3}{2}\right)\left(4iz^2 + (2 + 12i)z - 2 + 14i\right) = 0$. Pour résoudre cette dernière équation, on calcule le discriminant réduit de la deuxième parenthèse $\Delta' = (1 + 6i)^2 - 4i(-2 + 14i) = 1 - 36 + 12i + 8i + 56 = 21 + 20i$. Pour calculer une racine de Δ, on va procéder de manière algébrique. Soit $\delta = a + ib$, si $\delta^2 = \Delta$, alors

$a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{21^2+20^2} = 29$ et $a^2-b^2 = \text{Re}\ \Delta = 21$, d'où $a^2 = 25$ et $b^2 = 4$. Comme de plus $2ab = \text{Im}\ \Delta = 20$, les deux racines de Δ sont $5+2i$ et $-5-2i$. Enfin, les deux dernières de notre équation sont $z_1 = \dfrac{-1-6i-5-2i}{4i} = -2+\dfrac{3}{2}i$ et $z_2 = \dfrac{-1-6i+5+2i}{4i} = -1-i$. En conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}; -1-i; -2+\dfrac{3}{2}i\right\}$.

8. Pour cette dernière je ne résiste pas à tricher un peu en remarquant que $(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1) = z^5+1$, donc les solutions de l'équation vérifient $z^5 = -1$, soit $(-z)^5 = 1$, et sont donc les opposés des racines cinquièmes de l'unité, auxquels il faut enlever -1 qui n'était pas solution de l'équation initiale. On a donc $\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\pi}{5}}; e^{i\frac{3\pi}{5}}; e^{i\frac{7\pi}{5}}; e^{i\frac{9\pi}{5}}\}$.

Exercice 8

La méthode la plus simple est certainement de constater que 1 n'est pas racine, on peut donc faire le quotient et obtenir $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$, donc $\dfrac{z+1}{z-1}$ est une racine cinquième de l'unité. On détermine ensuite facilement les valeurs de z correspondantes : si $\dfrac{z+1}{z-1} = a$, on a $z+1 = az-a$, donc $z(a-1) = a+1$, soit $z = \dfrac{a+1}{a-1}$. On remarque 1 ne donne pas de solution, il n'y a donc que quatre valeurs possibles pour z (c'est normal, l'équation initiale est en fait de degré 4) : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1}; \dfrac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{4\pi}{5}}-1}; \dfrac{e^{i\frac{6\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{6\pi}{5}}-1}; \dfrac{e^{i\frac{8\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{8\pi}{5}}-1}\right\}$.

On peut également tout développer peu subtilement : $z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1 = z^5-5z^4+10z^3-10^2+5z-1$. Miracle, ça se simplifie avantageusement pour donner (une fois tout divisé par 2) $5z^4+10z^2+1 = 0$. On pose $Z = z^2$, et on a $5Z^2+10Z+1 = 0$. Le discriminant réduit de cette équation vaut $25-5 = 20 = (2\sqrt{5})^2$, donc les solutions en sont $Z_1 = \dfrac{-5+2\sqrt{5}}{5}$ et $Z_2 = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{5}$. Finalement, les solutions de l'équation initiale sont $\mathcal{S} = \left\{i\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}; i\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right\}$. Les deux ensembles de solutions sont les mêmes et pourtant exprimés de façon fort différente, mais ils donnent une nouvelle façon de calculer les valeurs exactes des cosinus et sinus de $\dfrac{2\pi}{5}$ et de ses multiples.

Exercice 9

Les trois points forment un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z-i}{iz-i} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$. Dans le premier cas, on obtient $z-i = ize^{i\frac{\pi}{3}} - ie^{i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-ie^{2i\frac{\pi}{3}}}$ et dans le deuxième $z-i = -ize^{i\frac{\pi}{3}} + ie^{i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1+ie^{2i\frac{\pi}{3}}}$

Exercice 10

Remarquons pour commencer que si on note r le pgcd de p et de q, toutes les racines r-èmes de l'unité sont à la fois racines p-èmes et q-èmes. En effet, comme r divise p, on a $p = \lambda r$, avec λ entier, et $z^p = z^{\lambda r} = (z^r)^\lambda = 1$. De même, $z^q = 1$.

La réciproque est un peu plus compliquée si on ne connait pas le théorème de Bezout. Si on a simultanément $z \in \mathbb{U}_p$ et $z \in \mathbb{U}_q$, on a $z^p = z^q = 1$ donc pour tous entiers n et m, on a

$z^{np-mq} = \dfrac{z^{np}}{z^{mq}} = 1$. Or, il existe un couple d'entiers tels que $np - mq$ soit égal à r (c'est ça le théorème de Bezout), donc $z^r = 1$. Pour montrer Bezout, on peut passer par l'algorithme d'Euclide : à chaque étape, le nouveau reste obtenu est une combinaison à coefficients entiers des deux restes précédents (il n'y a qu'à écrire la division euclidienne), donc par récurrence facile de p et de q. Comme le dernier reste est égal à r, celui-ci est bien une combinaison à coefficients entiers de p et q.

Exercice 11

Pour la première, Euler est votre ami : $\cos^6 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 = 2^{-6}(e^{6ix} + 6e^{5ix}e^{-ix} + 15e^{4ix}e^{-2ix} + 20e^{3ix}e^{-3ix}15e^{2ix}e^{-4ix} + 6e^{ix}e^{-5ix} + e^{-6ix}) = 2^{-6}(2\cos(6x) + 12\cos(4x) + 30\cos(2x) + 20) = \dfrac{1}{32}\cos(6x) + \dfrac{3}{16}\cos(4x) + \dfrac{15}{32}\cos(2x) + \dfrac{5}{16}$.

Pour la deuxième $\sin^2 x\cos^3 x = (1-\cos^2 x)\cos^3 x = \cos^3 x - \cos^5 x$. Or, par la même méthode que ci-dessus, $\cos^5 x = \dfrac{1}{16}(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos x)$ et $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos x)$, donc $\sin^2 x\cos^3 x = -\dfrac{1}{16}\cos(5x) - \dfrac{1}{16}\cos(3x) + \dfrac{1}{8}\cos x$.

Enfin, $\cos x\sin^5 x = \cos x\sin x\sin^4 x = \dfrac{1}{2}\sin(2x)\sin^4 x = \dfrac{1}{32}\left(\dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)(e^{ix} - e^{-ix})^4 =$

$$\frac{1}{32}\frac{(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})}{2i}$$
$$= \frac{1}{32}\frac{e^{6ix}-4e^{4ix}+6e^{2ix}-4+e^{-2ix}-e^{2ix}+4-6e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i}$$
$$= \frac{1}{32}\frac{e^{6ix}-4e^{4ix}+5e^{2ix}-5e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i} = \frac{1}{32}(\sin(6x) - 4\sin(4x) + 5\sin(2x)).$$

Exercice 12

La première utilise une reconnaissance binome de Newton :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} = \mathrm{Re}\,(1+e^{ix})^n = \mathrm{Re}\,(e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}))^n = \mathrm{Re}\,\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n e^{i\frac{nx}{2}} = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$

La deuxième est tout à fait classique :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos^k x} = \mathrm{Im}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \mathrm{Im}\,\frac{1-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}x}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}} = \mathrm{Im}\,\frac{\cos x - \frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^n x}}{\cos x - \cos x - i\sin x}$

$\displaystyle= \mathrm{Im}\, i\frac{\frac{\cos^{n+1}x - e^{i(n+1)x}}{\cos^n x}}{\sin x} = \frac{\cos^{n+1}x - \cos((n+1)x)}{\sin x\cos^n x}$

Enfin, la dernière demande un peu plus d'astuce :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}1 + i\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{n}$. Or, la fonction cotan étant symétrique par rapport à $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$, la somme des cotan est nulle (le premier terme s'annule avec le dernier, etc, puisque cotan $(\pi - x) =$ cotan x), donc il ne reste que $\dfrac{n-1}{2}$, qui est la valeur de la somme initiale.

Exercice 13

Posons $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{i\theta'}$. On a alors

$$\frac{u+v}{1+uv} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}} = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \times 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \frac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}$$, qui est bien un réel.

Exercice 14

Si $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$. Cherchons les valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour lesquelles $|1+z| \geq 1$. Par un calcul classique, $|1+z| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$. Or, $|\cos\frac{\theta}{2}| \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right] [\pi] \Leftrightarrow \theta \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right] [2\pi]$. Vérifions que pour les valeurs restantes de θ, $|1+z^2| \geq 1$. En effet, on a alors $\theta \in \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right] [2\pi]$, donc $2\theta \in \left[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\right] [4\pi]$, donc $|1+z^2| \geq 1$ d'après le calcul précédent, puisque $z^2 = e^{2i\theta}$. Les seuls cas pour lesquels les deux inégalités sont vérifiées sont $z_1 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $z_1 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 15

En effet, $|u+v|^2+|u-v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v})+(u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = |u|^2+u\overline{v}+v\overline{u}+|v|^2+|u|^2-u\overline{v}-v\overline{u}+|v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$.

Exercice 16

Le disque (fermé par exemple) de centre A et de rayon 1 a pur inéquation $|z-i| \leq 2$, ce qui élevé au carré donne $(z-i)(\overline{z}+i) \leq 4$, ou encore $z\overline{z} + iz - i\overline{z} \leq 3$.

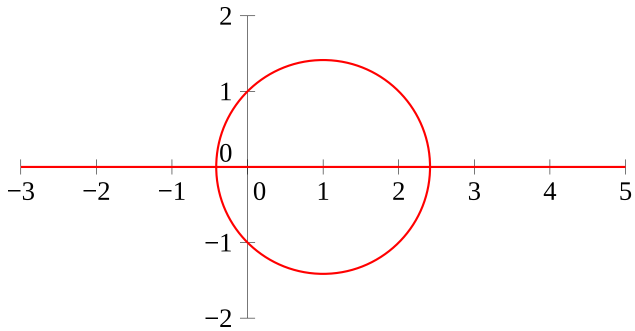
De même, l'équation $z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0$ peut se mettre sous la forme $(z+1)(\overline{z}+1) = 2$, donc $|z+1| \leq \sqrt{2}$. C'est l'équation du cercle de centre A d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 17

Soient A, B et C trois points du plan non alignés d'affixes respectives a, b et c. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC.

Exercice 18

1. Il suffit de résoudre l'équation $f(z) = z$, qui se réduit simplement à $z^2 = -1$, donc il y a deux complexes invariants par f, qui sont i et $-i$.
2. Une méthode consiste à poser $z = a+ib$, on a alors $f(z) = (a+ib)^2 + a + ib + 1 = a^2 - b^2 + a + 1 + i(2ab+b)$. L'image de z est donc réelle si et seulement si $2ab + b = b(2a+1) = 0$. Le lieu de tels point est l'union de la droite réelle ($b = 0$) et de celle constituée des nombres complexes de partie réelle $-\dfrac{1}{2}$ ($2a+1 = 0$).
3. Les trois points seront alignés par exemple si $\dfrac{z^2+z}{z-1} \in \mathbb{R}$. Or $\dfrac{z^2+z}{z-1} = \dfrac{a^2-b^2+a+i(2ab+b)}{a-1+ib}$. Si on multiplie par le conjugué $a-1-ib$, la partie imaginaire du numérateur sera égale à $-(a^2-b^2+a)b+(2ab+b)(a-1) = -a^2b+b^3-ab+2a^2b+ab-2ab-b = b^3+a^2b-2ab-b = b(b^2+a^2-2a-1)$. Pour que les trois points soient alignés, on doit donc avoir $b = 0$ (c'est-à-dire z réel) ou $b^2+a^2-2a-1 = 0$, ce qui équivaut à $b^2+(a-1)^2 = 2$, équation du cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon $\sqrt{2}$.



Exercice 19

1. Montrer que f réalise une bijection de A vers B (c'est-à-dire que tout élément de B a un unique antécédent dans A).
2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$) et celle du disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.