Exercices sur les complexes

PCSI 2 Lycée Pasteur

10 septembre 2007

Calculs

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{3+5i}{5-3i}$; $z_2 = (2-i)^3$; $z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $z_4 = (1-i\sqrt{3})^1 1$.

Exercice 2

Calculer le nombre $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i}\right)^{17}$.

Exercice 3

Pour chacun des nombres complexes a suivants, calculer l'inverse de a et résoudre l'équation $z^3 = a$: $a = \sqrt{3}+i$; $a = 1+j$; $a = \dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$.

Exercice 4

Trouver un nombre complexe z tel que $|z| = |z-4|$ et $\arg z = \arg(z+1+i)$.

Exercice 5

Déterminer z pour que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module.

Exercice 6

Déterminer z pour que z, z^2 et z^4 aient des images alignées.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - iz + 3 - i = 0$
2. $z^2 = -\overline{z}^2$
3. $z^4 - 2\cos\theta z^2 + 1 = 0$
4. $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0$
5. $z^4 = 24i - 7$
6. $\overline{z} = z^n$
7. $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ (cherchez d'abord une racine réelle)
8. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

Exercice 8

Résoudre de deux façons différentes l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$. Comparer les résultats.

Exercice 9
Trouver les nombres complexes z tels que les points A, B et C d'affixes respectives i, z et iz forment un triangle équilatéral.

Exercice 10
Quels sont les racines de l'unité appartenant à la fois à $\mathbb{U}_p$ et à $\mathbb{U}_q$ (p et q étant deux entiers distincts) ?

Trigonometrie

Exercice 11
Linéariser les expressions suivantes : $\cos^6 x$; $\sin^2 x \cos^3 x$; $\cos x \sin^5 x$.

Exercice 12
Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.

Exercice 13
Soient u et v deux complexes de module 1 tels que $uv \neq -1$. Montrer que $\dfrac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.

Exercice 14
Montrer que, si $|z| = 1$, on a soit $|1+z| \geq 1$, soit $|1+z^2| \geq 1$. Peut-on avoir les deux simultanément ?

Géométrie

Exercice 15
Montrer que, pour tous nombres complexes u et v, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ (égalité du parallélogramme).

Exercice 16
Donner l'équation du disque de centre A d'affixe i et de rayon 2. Déterminer la nature de l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $z\overline{z} + z + \overline{z} - 1 = 0$.

Exercice 17
Soient A, B et C trois points du plan non alignés d'affixes respectives a, b et c. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC.

Exercice 18
On considère l'application du plan complexe dans lui-même $f : z \mapsto z^2 + z + 1$.

1. Déterminer les complexes invariants par f.
2. Déterminer le lieux des points ayant une image réelle par f.
3. Déterminer le lieu des points M alignés avec leur image et avec 1.

Exercice 19
On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$, et on note $A = \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $A = \mathbb{C}\backslash\{2\}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de A vers B (c'est-à-dire que tout élément de B a un unique antécédent dans A).
2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$) et celle du disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.