Équations différentielles

PCSI 2 Lycée Pasteur

11 octobre 2007

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction habituellement notée y, à valeurs réelles ou complexes, et qui fait intervenir les dérivées de la fonction y. Une telle équation est dite d'ordre n lorsque la dérivée d'ordre le plus élevé de la fonction y apparaissant dans l'équation est celle d'ordre n. Les équations différentielles étant en général très difficiles à résoudre, on se contentera dans ce premier chapitre de traiter le cas d'équation d'ordre 1 et 2 très particulières, les équations différentielles linéaires.

1 Quelques rappels sur les primitives

Commençons avec une propriété toute bête et pourtant fondamentale pour ce qui va suivre :

Proposition 1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est constante sur I si et seulement si sa dérivée y est nulle.

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I, de dérivée f.

Proposition 2. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors $F - G$ est une fonction constante.

Démonstration. En effet, $F - G$ est alors dérivable sur I, de dérivée nulle. Elle y est donc constante. □

Proposition 3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est l'unique promitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration. Il faudrait bien sûr définir correctement les intégrales pour que ce résultat ait un sens. Mais en admettant les propriétés de l'intégrale, F est une primitive de f, et elle s'annule bien en a. De plus, deux telles primitives sont égales car elle diffèrent d'une constante, qui doit valoir 0 pour que les valeurs en a coïncident. □

Remarque 1. Dans les cas où on travaillera sur des fonctions complexes, les mêmes proptiétés que sur les primitives réelles existent. On convient simplement d'appeler primitive de la fonction $f = f_1 + if_2$ toute fonction de la forme $F_1 + iF_2$, où F_1 et F_2 sont des primitives respectives de f_1 et f_2. Deux primitives d'une même fonction différent alors d'une constante complexe.

2 Équations linéaires du premier ordre

2.1 Définitions, résolution d'équation homogène

Définition 2. Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$, où α, β, γ, sont trois fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pour la suite, on se placera souvent dans le cadre réel, mais tout reste vrai avec des fonctions à valeurs complexes). La variable t est une variable muette assujettie à appartenir à I, et l'inconnue est la fonction y, nécessairement dérivable pour que l'équation ait un sens.

Résoudre l'équation consiste à trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in I$, $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$.

Remarque 2. Si $\alpha(t)$ ne s'annule pas sur I, on peut ramener l'équation sous la forme suivante (appelée équation différentielle normalisée) : $y' + a(t)y = b(t)$. On ne s'intéressera désormais qu'à cette forme plus simple. Dans le cas où α s'annule, il convient de toute façon de séparer la résolution sur les intervalles où elle ne s'annule pas.

Définition 3. Un problème de Cauchy associé à l'équation précdente est un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(t)y & = & b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

On parle aussi d'équation différentielle avec conditions initiales.

Définition 4. L'équation $y' + a(t)y = 0$ est appelée équation homogène associée à l'équation différentielle précédente (ou encore équation sans second membre).

Théorème 1. Soit $y' + a(t)y = 0$ une équation linéaire homogène du premier ordre, avec a continue sur l'intervalle d'étude I. Alors ses solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{-A(t)}$, où K est une constante réelle et A une primitive (fixée) de a.

Démonstration. Supposons y solution de l'équation et posons $z(t) = y(t)e^{A(t)}$, où A est un primitive quelconque de a (qui, étant continue, possède des primitives), on a alors $z'(t) = y'(t)e^{A(t)} + a(t)y(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}(y'(t) + a(t)y(t)) = 0$. La fonction z a une dérivée nulle, elle est donc constante, égale à un certain réel K. On a alors, par définition de z, $y(t) = Ke^{A(t)}$. Réciproquement, ces fonctions sont bien solutions du problème posé. $\square$

Remarque 3. Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires du premier ordre ont donc toujours une solution unique. En particulier, on peut définir la fonction exponentielle comme solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

Proposition 4. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors f est nulle ou $f(x) = e^{ax}$, pour une certaine constante réelle a.

Démonstration. On a déjà vu au chapitre sur les fonctions usuelles que les exponentielles convenaient. Le sens inverse se fait en fait de la même façon. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle demandée, commençons par remarquer que $f(0) = (f(0))^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, on obtient en remplaçant x par 0 dans l'équation fonctionnelle que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Si $f(0) = 1$, on dériver l'équation par rapport à y puis fixer $x = 0$, ce qui donne $f'(x+y) = f'(x)f(y)$, puis $f'(y) = f'(0)f(y)$. En notant $a = f'(0)$, f est donc solution du problème de Cauchy associé à l'équation différente $y' = ay$, avec $y(0) = 1$. Ce problème admet pour unique solution $y : t \mapsto e^{at}$, d'où la proposition. $\square$

Exemple : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$. Les solutions de l'équation sont de la forme Ke^{-x^2}, et la condition initiale se traduit alors par $Ke^{-1} = 2$, soit $K = 2e$, donc l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $y : x \mapsto 2e^{1-x^2}$.

2.2 Résolution d'équations complètes

Théorème 2. Soit $y' + a(t)y = b(t)$ une équation différentielle linéaire sur un intervalle I, avec a continue sur I. Alors les solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto Ke^{-A(t)} + y_p(t)$, où K est une constante réelle, A une primitive fixée de a, et y_0 une solution particulière quelconque de l'équation.

Si de plus on impose la condition $y(t_0) = y_0$, avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, la solution du problème de Cauchy existe et est unique, il s'agit de la fonction $t \mapsto y_0 e^{A(t_0)-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(x)} b(x)\, dx$.

Remarque 4. La première partie du théorème indique simplement que toute solution de l'équation complète est obtenue comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation sans second membre.

Démonstration. Commençons par la première affirmation. Soit donc y_p une solution particulière et y une solution quelconque. On a $y'+a(t)y = b(t) \Leftrightarrow y'+a(t)y = y_p'+a(t)y_p \Leftrightarrow (y-y_p)'+a(t)(y-y_p) = 0$. La différence des deux fonctions est donc solution de l'équation homogène, ce qui en utilisant les résultats du paragraphe précédent donne la forme demandée.

La deuxième moitié fait intervenir une technique qui sera fondamentale pour la suite. On cherche une fonction y vérifiant l'équation et telle que $y(t_0) = y_0$. Posons $z(t) = y(t)e^{A(t)}$. On obtient, très similairement à ce qu'on a fait pour les équations homogènes un peu plus haut, $z'(t) = b(t)e^{A(t)}$. La fonction z est donc la primitive de be^A valant $y_0 e^{A(t_0)}$ en t_0 (cette primitive est unique), c'est-à-dire $z(t) = y_0 e^{A(t_0)} + \int_{t_0}^{t} b(c)e^{A(x)}\, dx$. Cela donne bien la formule souhaitée pour y. □

Remarque 5. Cette formule n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas cacluler l'intégrale. Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien le plus difficile) trouver une solution particulière. Pour cela, deux techniques utiles :

Proposition 5. Principe de superposition

Soit $y' + a(t)y = 0$ une équation différentielle homogène et y_1, y_2 des solutions particulières de l'équation complète obtenue en ajoutant respectivement comme second membre $b_1(t)$ et $b_2(t)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de l'équation avec pour second membre $b_1(t) + b_2(t)$.

Démonstration. C'est un calcul idiot : si $y_1' + a(t)y_1 = b_1(t)$ et $y_2' + a(t)y_2 = b_2(t)$, on a $(y_1 + y_2)' + a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$. □

Méthode de variation de la constante :

Il est naturellement conseillé dans un premier temps de chercher une solution particulière « évidente » ou d'une forme très particulière dans le cas où trainent des exponentielles et des polynomes. Toutefois, dans le cas général, il n'existe pas de solution particulière simple, et on a alors recours à la méthode suivante : on cherche y_p de la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$. Autrement dit, y_p est de la même forme que les solutions de l'équation homogène, à la différence près qu'on a remplacé la constante K par une fonction λ (d'où le nom de variation de la constante).

Exemple 1 :

On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' + ty = t$. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{-\frac{t^2}{2}}$, et une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1, donc les solutions de l'équation sont de la forme $Ke^{-\frac{t^2}{2}} + 1$.

Exemple 2 :

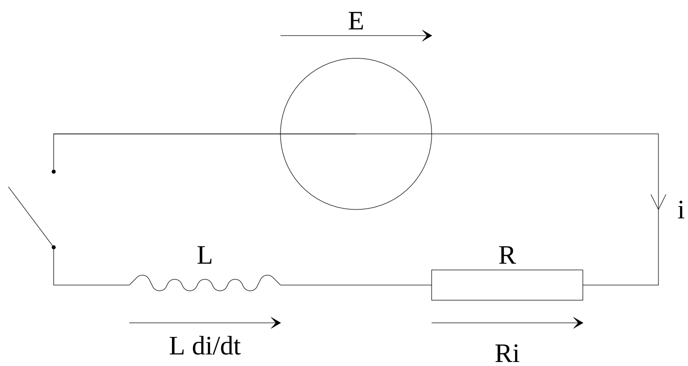
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y'+2\dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x}$. L'équation homogène associée est $y' + 2\dfrac{y}{x} = 0$, dont les solutions sont de la forme $Ke^{-A(t)}$, où A est une primitive quelconque de $\dfrac{2}{x}$. Une telle primitive est $2\ln x$, donc les solutions sont les fonctions $Ke^{-2\ln x} = \dfrac{K}{x^2}$.

Reste à trouver une solution particulière, via la méthode de variation de la constante : posons $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x^2}$, on a alors $y'(x) = \dfrac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\dfrac{\lambda(x)}{x^3}$, donc $\dfrac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\dfrac{\lambda(x)}{x^3} + 2\dfrac{\lambda(x)}{x^3} = \dfrac{e^x}{x}$. La fonction λ est donc une primitive de $x \mapsto xe^x$. On peut par exemple choisir $\lambda(x) = \int_0^x te^t\, dt = [te^t]_0^x -$

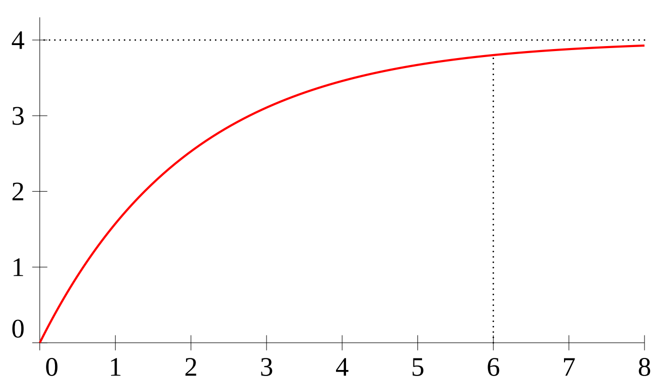
$\displaystyle\int_0^x e^t\ dt = xe^x - e^x + 1$. On obtient finalement toutes les solutions de l'équation initiale sous la forme $x \mapsto \dfrac{K' + (x-1)e^x}{x^2}$, où $K' = K + 1$.

Exemple 3 :

On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résitance R, une bobine d'inductance L et un interrupter. À l'instant $t = 0$, pon ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert. Comment évolue l'intensité i dans le circuit ?



L'intensité vérifie l'équation différentielle $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, avec comme condition initiale $i(0) = 0$. En notant $\tau = \dfrac{L}{R}$ (constante de temps du circuit), on obtient $i' + \dfrac{i}{\tau} = \dfrac{E}{L}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, et la fonction constance $\dfrac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation. La solution générale est donc de la forme $t \mapsto \dfrac{E}{R} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$. Comme de plus $i(0) = 0$, on obtient $K = -\dfrac{E}{R}$, soit $i(t) = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. (si $t \geqslant 0$, bien entendu). La courbe ressemble à ceci (on a pris $\dfrac{E}{R} = 4$ et $\tau = 2$) :



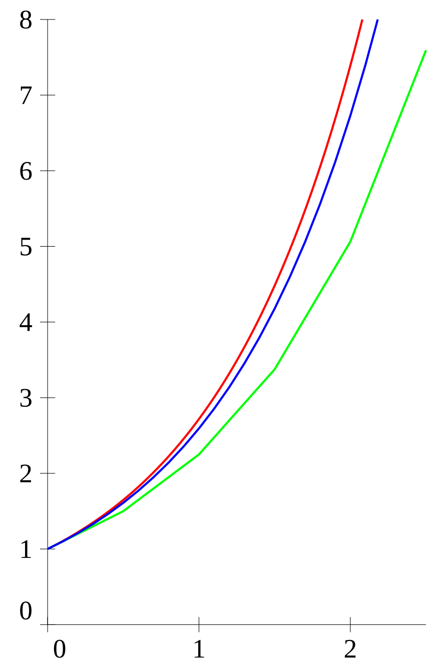
La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec une asymptote horizontale de valeur $\dfrac{E}{R}$ en $+\infty$. En physique, on dira plutôt que l'intensité est en régime permanent quand elle s'approche fortement de son symptote (en pratique, pour un circuit RL, on considère le régime permanent atteint pour $t = 3\tau$, à cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale), et en régime transitoire dans sa période de forte croissance.

2.3 Méthode d'Euler pour la résolution approchée

La méthode d'Euler est une méthode de résulution approchée des équations différentielles du premier ordre. Elle ne fournira donc jamais de solutions exactes, mais permet néanmoins de se faire une allure des courbes intégrales. Le principe est d'approcher une solution de l'équation par sa tangente sur de petits intervalles, à partir d'une condition initiale. Considérons une équation de la forme $f' + a(t)f = b(t)$, et supposons qu'on impose $f(0) = 0$. On a alors $f'(0) = b(0)$, et on approchera donc f par la doite d'équation $y = b(0)x$ au voisinage de 0. En pratique, on se donne un pas h, par exemple $h = 0.1$, et on considère la première approximation valable sur $[0; 0.1]$. En 0.1, on peut maintenant calculer une valeur approchée de $y(0.1)$ grace à l'approximation précédente, et en déduire une valeur approchée de $f'(0.1)$, qui permet de faire une nouvelle approximation sur $[0.1; 0.2]$, et ainsi de suite. Bien entendu, plus on s'éloigne du point de départ, moins le résultat est précis, mais la méthode donne d'assez bons résultats en pratique.

Construction de l'exponentielle :

Appliquons cette méthode à l'équation $f' = f$, avec $f(0) = 1$. Prenons un pas de la forme $h = \dfrac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Comme on impose $f(0) = 1$, on a $f'(0) = 1$, donc on approche f sur $[0; \frac{1}{n}]$ par la droite d'équation $y = 1 + x$. On a donc $f(\frac{1}{n}) \simeq 1 + \frac{1}{n}$, d'où $f'(\frac{1}{n}) \simeq 1 + \frac{1}{n}$. L'équation de la tangente approchée en ce point est alors $y = (1 + \frac{1}{n})(x - \frac{1}{n}) + 1 + \frac{1}{n} = (1 + \frac{1}{n})(x + 1 - \frac{1}{n})$. En $\frac{2}{n}$, on a alors $f(\frac{2}{n}) \simeq (1 + \frac{1}{n})^2$, etc. On montre par récurrence que $f(\frac{p}{n}) \simeq (1 + \frac{1}{n})^p$. En effet, c'est vrai pour $p = 1$, et en le supposans vrai pour un entier p, l'équation de la tangente approchée en $\frac{p}{n}$ sera $y = (1 + \frac{1}{n})^p(x - \frac{p}{n} + 1)$, dont la valeur en $\frac{p+1}{n}$ est $(1 + \frac{1}{n})^{p+1}$. En admettant que les courbes ainsi obtenues vont effectivement se rapprocher de celle de l'exponentielle quand n tend vers $+\infty$ (le pas tendant alors vers 0), on peut obtenir la propriété suivante pour l'exponentielle, qui sera démontrée plus tard dans le cours : $e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Exemples de courbes obtenues par la méthode d'Euler, pour $n = 2$ et $n = 10$ (en rouge, l'exponentielle, en vert la courbe obtenue avec $n = 2$ et en bleu celle obtenue avec $n = 10$).



3 Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre. Simplement, la complexité devenant nettement plus élevée, on se restreindra au cas de coefficients constants.

Définition 5. Une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants est une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = f(t)$, où a, b et c sont trois nombres complexes (ou réels) tels que $a \neq 0$, et f une fonction continue sur l'intervalle d'étude I. On associe à cette équation l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

Un problème de Cauchy pour une équation du deuxième est constitué d'un système du type :

$$\begin{cases} ay'' + by' + c & = & f(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & y'_0 \end{cases}$$

Définition 6. On appelle équation caractéristique associée à l'équation sans second membre l'équation $ar^2 + br + c = 0$.

Théorème 3. Solutions complexes de l'équation sans second membre.

Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions complexes de l'équations homogènes sont les fonctions de la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, où A et B sont deux constantes complexes.

Si l'équation caractéristique a une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $Ae^{rt} + Bte^{rt}$, $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème 4. Solutions réelles de l'équation sans second membre.

Lorsque les coefficients de l'équation sont réels, on recherche des fonctions solutions à valeurs réelles.

Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions relles de l'équations homogènes sont les fonctions de la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, où A et B sont deux constantes relles.

Si l'équation caractéristique a une racine double réelle r, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $Ae^{rt} + Bte^{rt}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Enfin, si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, les solutions sont de la forme $(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{rt}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 6. Dans tous les cas, les solutions de l'équation homogène s'écrivent comme combinaisons obtenues à partir de deux solutions particulières de cette équation. Nous aurons une interprétation de ce résultat quand nous aurons étudié les espaces vectoriels.

Démonstration. Dans un premier temps, occupons-nous du cas complexe. Commençons par rechercher les solutions de l'équation de la forme $y : t \mapsto e^{rt}$. On a alors $y'(t) = re^{rt}$ et $y''(t) = r^2 e^{rt}$, donc en factorisant par e^{rt}, y est solution de l'équation si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique.

Soit donc r_1 une racine de cette équation et y une solution de notre équation différentielle, quon va écrire (de façon très analogue au cas du premier ordre) sous la forme $z(t)e^{r_1 t}$. On a alors $y'(t) = (z'(t) + r_1 z(t))e^{r_1 t}$ et $y''(t) = (z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t))e^{r_1 t}$. En factorisant une fois de plus par $e^{r_1 t}$, on obtient la condition $az'' + (2ar_1 + b)z' + (ar_1^2 + br_1 + c)z = 0$. Le dernier terme du membre de gauche étant nul, la fonction z' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre $aw' + (2ar_1 + b)w = 0$. Dans le cas où r_1 est racine double de l'équation, $2ar_1 + b = 0$, et z'' est nulle ; z est donc une fonction affine, on retrouve bien des solutions de la forme $(A + Bt)e^{r_1 t}$. Si r_1 n'est pas racine double, on a par contre $z'(t) = Ke^{-(2r_1 + \frac{b}{a})t}$. En posant $A = -\dfrac{\lambda}{2r_1 + \frac{b}{a}}$, on a alors $z(t) = Ae^{-(2r_1 + \frac{b}{a})t} + B$, soit $y(t) = z(t)e^{r_1 t} = Ae^{-(r_1 + \frac{b}{a})t} + Be^{r_1 t}$. Or, la deuxième racine de l'équation caractéristique n'est autre que $-(r_1 + \frac{b}{a})$, puisqu'on sait que les deux racines d'un trinome ont pour somme $-\frac{b}{a}$. On retrouve exactement les solutions annoncées.

Passons au cas réel. Il suffit en fait de déterminer les solutions réelles parmi celles déterminées ci-dessus dans le cas où les coefficients de l'équation sont réels. Si $\Delta > 0$, les solutions complexes sont de la forme $y : t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t})$, avec A et B a priori complexes. On a alors $y(t) = e^{r_1 t}(A + Be^{(r_2 - r_1)t}$.

En faisant tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $r_2 - r_1$, on obtient $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{e^{r_1 t}} = A$. On en déduit que que le coefficient A est nécessairement réel, puis que B l'est également (en regardant par exemple en $t = 1$). Réciproquement, si A et B sont réels, la fonction est à valeurs réelles.

Dans le cas où il y a une racine double, $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$. On a donc $\dfrac{y(t)}{te^{rt}} = \dfrac{A}{t} + B$, qui a pour limite B quand t tend vers $\pm\infty$. on conclut comme ci-dessus.

Enfin, s'il y a deux racines complexes conjuguées $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$, $y(t) = e^{rt}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$. Examinons les valeurs prises par une telle fonction en $t = 0$ et en $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$. Pour que $y(0)$ soit réel, il faut avoir $\text{Im }(A) + \text{Im }(B) = 0$. De même, pour que y soit réelle en $\dfrac{2\pi}{\omega}$, il faut que $e^{\frac{2\pi r}{\omega}}(iA - iB)$ soit réel, ce qui se produit si $i(A-B) \in \mathbb{R}$, soit $A - B \in i\mathbb{R}$, ou encore $\text{Re }(A) = \text{Re }(B)$. Finalement, les deux condition combinées nous donnent $B = \overline{A}$, donc $y(t) = e^{rt}(Ae^{i\omega t} + \overline{A}e^{-i\omega t}) = 2e^{rt}\text{Re }(Ae^{i\omega t}) = 2e^{rt}(\text{Re }(A)\cos(\omega t) - \text{Im }(A)\sin(\omega t))$, qui est bien de la forme annoncée.

□

Remarque 7. Une équation différentielle de la forme $y'' - \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$, a donc pour solutions les fonctions de la forme $Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. De même les solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ sont de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Ces équations apparaissent très fréquemment en physique. Pour la deuxième d'entre elles, on préfère en physique écrire les solutions sous la forme $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0; \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$. La constante A est appelée amplitude de la solution, et la constante φ déphasage.

Exemple 1 : Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^x + Be^{2x}$. Remarquons que si on impose les valeurs de y et de y' en un point, par exemple $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, il existe une seule solution qui les vérifie. Ici, on obtient le système $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$, dont on tire $A = 2$ et $B = -1$. la seule solution de l'équation homogène vérifiant les deux conditions imposées est donc $y : t \mapsto 2e^x - e^{2x}$.

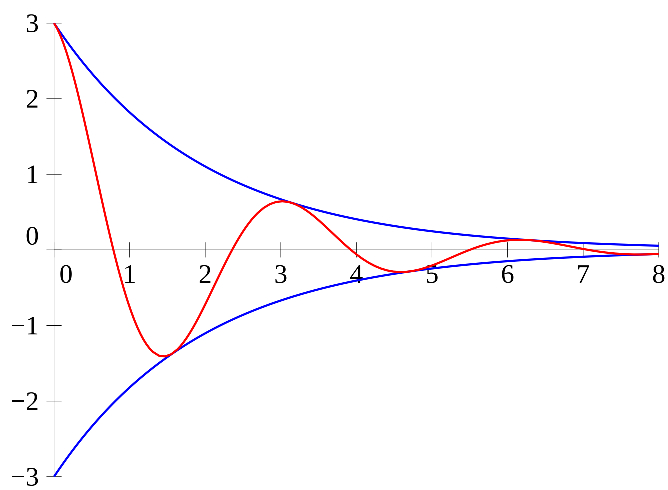
Exemple 2 : De même, les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $t \mapsto (A + Bt)e^t$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $t \mapsto te^t$.

Exemple 3 : Revenons une nouvelle fois à un peu de physique. On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que, comme la dernière fois, on fermera à $t = 0$.

On suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de l'interrupteur. On va s'intéresser à l'évolution de cette charge q. Elle est, mathématiquement parlant, la dérivée de l'intensité i. Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_C = \dfrac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur. On a dans le circuit $L\dfrac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$, soit en exprimant tout en fonction de q, $q'' + \dfrac{R}{L}q' + \dfrac{1}{LC}q = 0$. On note habituellement en physique

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (vous allez vite comprendre pourquoi), constante appelée pulsation propre du circuit, et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{L}{R\omega_0}$, qu'on appelle facteur de qualité du circuit. Notre équation différentielle devient alors $q'' + \dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 q = 0$. On a par ailleurs les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité). Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

Le discriminant est positif quand $Q < \dfrac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\dfrac{\omega_0}{2Q}(\pm\sqrt{1-4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux. La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes, on parle alors de régime apériodique, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0. Au contraire, lorsque $Q > \dfrac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique de période ω_0 par une exponentielle décroissante. On parle alors de régime pseudo-périodique : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps. Une allure de la fonction de charge dans ce cas :



Enfin, dans le cas où $Q = \dfrac{1}{2}$, il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante. On parle de régime critique, la courbe ressemble à celle du régime apériodique.

Théorème 5. Soit $ay'' + by + c = f(t)$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Alors ses solutions sont de la forme $y : t \mapsto y_p(t) + y_h(t)$, où y_p est une solution particulière fixée de l'équation, et y_h parcourt l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. C'est la même preuve que pour le premier ordre : si $ay''+by+c = f$, on a $ay''+by+c = ay_p'' + by_p' + c$, d'où $a(y-y_p)'' + b(y-y_p)' + c(y-y_p) = 0$, et $y - y_p$ est donc solution de l'équation sans second membre. □

Théorème 6. Un problème de Cauchy associé à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants admet toujours une solution unique.

Démonstration. Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$ et prenons par exemple le cas de deux racines complexes distinctes. Les solutions sont alors de la forme $t \mapsto y_p(t) + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. Imposer à une solution $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$ revient donc à demander que A et B soient solutions d'un système du type $Aa + Bb = \alpha$, $r_1 Aa + r_2 Bb = \beta$, où a, b, α et β sont des constantes complexes. Ce système a toujours une solution unique car, $r_1 \neq r_2$. Les autres cas sont similaires. □

Proposition 6. Le principe de superposition reste vrai pour les équations différentielles du deuxième ordre.

Le problème reste le même que dans le cas des équations du premier ordre : trouver une solution particulière de l'équation. En général, il n'existe pas de méthode très efficace, c'est pourquoi nous nous bornerons à décrire une méthode dans un cas très particulier, celui où la fonction f est de la forme $P(t)e^{kt}$, où P est un polynome, et m un coefficient complexe. Par superposition, on saura alors trouver des solutions particulières quand le deuxième membre est une somme de telles fonctions.

Proposition 7. Soit $ay''+by'+c = P(t)e^{kt}$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, telle que P soit un polynome de degré n. Alors il existe une solution particulière à l'équation de la forme $t \mapsto Q(t)e^{kt}$, avec $d^\circ(Q) \leqslant n$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique de l'équation, $d^\circ(Q) \leqslant n+1$ si k en est une racine simple et $d^\circ(Q) \leqslant n+2$ si k en est une racine double.

Exemple : on cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$.

Les solutions de l'équaion homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$.

Pour chercher une solution particulière, utilisons le principe de superposition et commençons par chercher une solution de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y_1(x) = ax^2 + bx + c$. On a donc $y_1''(x) = 2a$, donc on cherche à avoir $-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1$, ce qui nous donne comme conditions $-a = 1$, donc $a = -1$, $b = 0$, et $2a - c = 1$, donc $c = 2a - 1 = -3$. On obtient donc $y_1(x) = -x^2 - 3$.

Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y'' - y = e^x$ sous la forme $y_2(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ (puisque 1 est racine de l'équation caractéristique). On a donc $y'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$, et $y''(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta)e^x$, donc $y'' - y = e^x$ si (en factorisant par e^x) $\alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{2}$. On peut prendre n'importe quelle valeur pour β, choisissons par exemple $y_2(x) = \dfrac{1}{2}xe^x$.

Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_p : x \mapsto -x^2 - 3 - \dfrac{xe^x}{2}$, et les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto -x^2 - 3 + \left(A - \dfrac{x}{2}\right)e^x + Be^{-x}$.

Remarque 8. On peut trouver de même des solutions particulières dans le cas où un cos ou un sin apparait dans le second membre de l'équation.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos x$.

L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + r + 1$, donc les racines sont $r_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto (A\cos(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + B\sin(\frac{t\sqrt{3}}{2}))e^{-\frac{t}{2}}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation générale, commençons par remarquer que $y'' + y' + y = \mathrm{Re}\,(e^{(1+i)x})$. Cherchons alors plutôt une solution particulière (complexe) de l'équation $y'' + y' + y = e^{(1+i)x}$. On la cherche sous la forme $y_p : t \mapsto ae^{(1+i)x}$, où a est une constante complexe. On a donc $y_p'(t) = a(1+i)e^{(1+i)t}$, et $y_p''(t) = (a(1+i)^2)e^{(1+i)t} = 2iae^{(1+i)t}$. En factorisant par $e^{(1+i)t}$, on voit que y_p est solution si $a(2+3i) = 1$, soit $a = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{13}$. On a donc $y_p(t) = \dfrac{2-3i}{13}e^{(1+i)t}$, et en prenant sa partie réelle, on obtient une solution de notre équation initiale : $\widetilde{y}_p : t \mapsto \dfrac{2\cos t + 3\sin t}{13}e^t$.

Conclusion : les solutions de l'équation initiale sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \left(\frac{2\cos t + 3\sin t}{13}\right)e^t + \left(A\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + B\sin\frac{t\sqrt{3}}{3}\right)e^{-\frac{t}{2}}$$