# $\mathbb{N}$, Ensembles finis

PCSI 2 Lycée Pasteur

2 octobre 2007

## 1 L'ensemble $\mathbb{N}$

**Proposition 1.** L'ensemble $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

C'est « évident » mais le problème est en fait détourné, car on est vité ramenés à la définition de ce qu'est exactement l'ensemble $\mathbb{N}$. Comment définir les entiers naturels, qui portent tellement bien leur nom qu'on a bien du mal à les décrire précisément ? Ce problème n'est pas vraiment notre priorité ici, on admettra donc les propriétés « évidentes » de $\mathbb{N}$.

**Proposition 2.** Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Tout partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. L'ensemble $\mathbb{N}$ lui-même n'admet pas de plus grand élémént.

**Théorème 1. Principe de récurrence**
Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $0 \in A$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in A \;\Rightarrow\; n+1 \in A$, alors $A = \mathbb{N}$.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que $A$ n'est pas égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Le complémentaire de $A$ dans $\mathbb{N}$ est alors un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, donc admet un plus petit élément, notons-le $n_0$. On ne peut avoir $n_0 = 0$ puisque par hypothèse $0 \in A$, donc $n_0 - 1$ est un entier appartenant à $A$ (sinon, $n_0$ ne serait pas minimal dans le complémentaire de $A$). On a donc $n_0 \notin A$, mais $n_0 - 1 \in A$, ce qui contredit la deuxième hypothèse faite sur $A$. Notre hypothèse de départ était donc absurde, et $A = \mathbb{N}$. □

Ce théorème est bien à l'origine de ce qu'on appelle usuellement raisonnement par récurrence, mais qui peut prendre plusieurs formes légèrement distinctes. Dans tous les cas, le but est de prouver qu'une famille de propriétés $P_n$ (indexées) par l'ensemble $\mathbb{N}$, est vraie.

**Récurrence simple :** la forme la plus simple de raisonnement par récurrence est la récurrence simple. On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ est vraie}\}$. D'après le théorème précédent, il suffit pour montrer que toutes les propriétés sont vraies (c'est-à-dire que $A = \mathbb{N}$) de prouver que $0 \in A$ (c'est-à-dire que $P_0$ est vraie, c'est l'étape d'initialisation) et que $n \in A \;\Rightarrow\; n+1 \in A$ (c'est-à-dire que si $P_n$ est vraie, alors $P_{n+1}$ est vraie, c'est l'étape de preuve de l'hérédité). C'est exactement ce que vous avez l'habitude de faire.

*Remarque* 1. L'étape d'initialisation est essentielle. Il faut également faire très attention à ce que l'hérédité soit valable pour toutes les valeurs de $n$. Un exemple classique de récurrence douteuse : on note $P_n$ la propriété « $n$ droites deux à deux non parallèles dans le plan sont concourrantes ». La proprité est vraie au rang 2. Supposons-la vérifiée au rang $n$ et considérons $n+1$ droites. Par hypothèse de récurrence, les $n$ premières droites sont concourrantes en un point $P$, et les $n$ dernières concourrantes en un point $Q$. Mais $P$ et $Q$ appartiennent tous deux aux $n-1$ droites qu'on obtient en enlevant la première et la dernière droite de notre ensemble, donc en fait $P = Q$. Conclusion : nos $n+1$ droites sont b ien concourrantes, et on a prouvé par récurrence que $n$ droites du plan, sauf cas particulier de parallélisme, étaient concourrantes. Cherchez l'erreur...

Elle se situe bien sûr dans la preuve de l'hérédité : si $n = 2$, on a $n - 1$, donc l'ensemble de $n - 1$ droites auxquelles appartiennent $P$ et $Q$ est réduit à une droite, ce qui ne permet absolument pas de conclure que $P = Q$.

**Exemple :** prenons un tout petit peu d'avance sur la suite du cours en démontrant par récurrence un calcul de somme classique. On cherche à déterminer $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. Nous allons prouver par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Initialisation : pour $n = 0$, $S_0 = 0 = \dfrac{0 \times 1}{2}$, donc la propriété est vérifiée. Supposons désormais qu'on a effectivement $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k = S_n + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$. Par principe de récurrence, l'égalité est bien vraie pour tout entier $n$.

*Remarque* 2. Il arrive qu'on débute la récurrence non pas à $n = 0$, mais à une certaine valeur donnée de $n$. le principe reste le même, seule l'étape d'initialisation se fait à un rang différent.

**Récurrence double :** elle consiste juste à prendre comme hypothèse de récurrence que $P_n$ **et** $P_{n+1}$ sont vérifiées et à prouver qu'alors $P_{n+2}$ est également vérifiée. Attention, dans ce cas il faudra initialiser en vérifiant à la fois $P_0$ et $P_1$. Formellement, on note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \textbf{ et } P_{n+1} \text{ sont vraies}\}$. Vérifier que $0 \in A$ revient bien à vérifier $P_0$ et $P_1$ vraies, et vérifier $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ revient à prouver, en supposant $P_n$ et $P_{n+1}$ vérifiées, que $P_{n+1}$ et $P_{n+2}$ le sont aussi. Manifestement, il n'y a que $P_{n+2}$ à vérifier.

**Exemple :** On définit la suite de Fibonacci par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et on cherche à prouver que $\sqrt{5}u_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$. On va effectuer une récurrence double. Initialisation $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 = \sqrt{5} = \sqrt{5}u_0$ ; et $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}-1-5-2\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5} = \sqrt{5}u_1$. Pour démontrer l'hérédité, nous utiliserons le fait suivant : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les racines de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ (je vous laisse résoudre...) et vérifient donc $1 + x = x^2$. Supposons désormais les égalités vérifiées aux rangs $n$ et $n + 1$, on a alors $\sqrt{5}u_{n+2} = \sqrt{5}u_{n+1} + \sqrt{5}u_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1)(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}$. Par principe de récurrence, la formule est donc vérifiée pour tout entier $n$.

**Récurrence totale** (ou généralisée, ou forte) : quitte à devoir faire des récurrences doubles ou triples (une récurrence triple marche exactement comme une récurrence double, il y a juste un rang de plus à vérifier dans l'initialisation), pourquoi ne pas tout supposer à chaque fois ? Ca ne coute en fait rien. Pour une récurrence totale, on choisit comme hypothèse de récurrence que $\forall k \geqslant n$, $P_k$ est vérifiée. L'initialisation se limite à $P_0$, mais on peut utiliser pour prouver l'hérédité toutes les propriétés $P_k$, pour des valeurs de $k$ inférieures ou égales à $n$. Formellement, on prend $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geqslant n, P_n \text{ est vraie}\}$.

**Exemple :** La preuve de l'inégalité triangulaire généralisée vue en exemple dans le cours sur les complexes est une sorte de récurrence totale. On utilise pour prouver l'inégalité sur $n + 1$ complexes à la fois celle avec $n$ complexes, et celle avec 2 complexes, qu'il faut donc ajouter à l'hypothèse de récurrence. Autant faire une récurrence totale.

## 2 Ensembles finis

**Proposition 3.** Si l'ensemble $\{1; \dots ; n\}$ est en bijection avec l'ensemble $\{1; \dots ; m\}$, alors $n = m$.

*Démonstration.* Difficile de réellement prouver rigoureusement ce résultat. Faisons-le par récurrence. Il n'existe manifestement pas de bijection de l'ensemble vide vers un ensemle du type $\{1; \dots ; n\}$ pour $n > 0$ (une application allant de l'ensemble vide vers un ensemble non vide ne peut être surjective). Supposons ensuite $n \geqslant 1$. Si les deux ensembles sont en bijection pour $n \neq m$, notons $f$ la bijection et $p = f(n)$. En composant par la bijection de $\{1; \dots ; m\}$ qui échange $p$ et $m$ et laisse les autres éléments fixes, on obtient une bijection qui envoie $n$ sur $m$. La restriction à $\{1;\dots;n-1\}$ est alors une bijection vers $\{1;\dots;m-1\}$. Par hypothèse de récurrence, on ne peut avoir que $n-1=m-1$, donc $n=m$. □

**Définition 1.** Un ensemble $E$ est dit fini s'il est en bijection avec $\{1;\dots;n\}$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ (si $n=0$, l'ensemble $E$ est vide). On note alors $n = card(E)$ (cardinal de l'ensemble fini $E$).

**Proposition 4.** Deux ensemble finis en bijection l'un avec l'autre ont même cardinal.

*Démonstration.* En effet en composant cette bijection avec la bijection de l'ensemble d'arrivée vers $\{1;\dots;n\}$, on voit que l'ensemble de départ a le même cardinal. □

**Proposition 5.** Soient deux ensembles finis $E$ et $F$ de même cardinal, et $f : E \to F$ une application, alors $f$ bijective $\Leftrightarrow$ $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ surjective.

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'une application injective de $\{1;\dots;n\}$ dans lui-même qui est injective, ou surjective, est bijective. Supposons-la injective et pas surjective, il existe alors des éléments sans antécédents. Prolongeons l'application à $\{1;\dots;n+p\}$ en associant aux entiers compris entre $n+1$ et $n+p$ les entiers qui n'avaient pas d'antécédents, de manière bijective. On construit alors une bijection de $\{1;\dots;n+p\}$ vers $\{1;dots;n\}$, ce qui est absurde d'après la première propriété énoncée plus haut. De même, si l'application est surjective non injective, elle sera bijective d'un sous-ensemble de $\{1;\dots;n\}$ vers $\{1;\dots;n\}$ (il suffit, pour les éléments ayant plusieurs antécédents, de n'en considérer qu'un et d'enlever les autres de l'ensemble de départ). Cela aussi est absurde. □

**Proposition 6.** Soit $E$ un ensemble fini et $A \subset E$ alors $A$ est fini et $card(A) \leqslant card(E)$.

*Démonstration.* Soit $f$ une bijection de $\{1;\dots;n\}$ vers $E$. Alors $A$ est l'image par $f$ d'un sous-ensemble de $\{1;\dots;n\}$, donc en bijection avec un ensemble à moins de $n$ éléments. □

**Proposition 7.** Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles finis d'un ensemble $E$. Alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cup B)$. On a notamment, si $E$ est fini, $card(A) = card(E) - card(\overline{A})$.

*Démonstration.* Commençons par le cas où les deux ensembles sont disjoints. On a alors une bijection $f$ de $\{1;\dots;n\}$ vers $A$ et une bijection $g$ de $\{1;\dots;p\}$ vers $B$. Notons $h$ l'application de $\{1;\dots;n+p\}$ vers $A \cup B$ construite comme suit : $\forall i\ leqn$, $h(i) = f(i)$, et $\forall n+1 \leqslant i \leqslant n+p$, $h(i) = g(i-n)$ (autrement dit, on met $f$ et $g$ « bout à bout »). L'application $h$ est surjective, car par construction tout élément de $A$ a un antécédent dans $\{1;\dots;n\}$ (cela découle de la surjectivité de $f$) et tout élément de $B$ a un antécédent dans $\{n+1;\dots;n+p\}$. De plus, $h$ est injective sur $\{1;\dots;n\}$ et sur $\{n+1;\dots;n+p\}$ (car $f$ et $g$ le sont), et si $i$ et $j$ appartiennent chacun à un de ces deux ensembles, $f(i)$ et $f(j)$ appartiennent, l'un à $A$ et l'autre à $B$ donc ne peuvent être égaux puisque $A$ et $B$ sont disjoints. Donc $h$ est injective, et bijective.

En appliquant ce résultat à $A$ et $\overline{A}$, qui sont bien disjoints, on obtient $card(A) = card(E) - card(\overline{A})$.

Remarquons désormais que $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$ (union disjointe) et de même $B = (B\backslash A) \cup (A \cap B)$, donc $card(A) = card(A\backslash B) + card(A \cap B)$ et $card(B) = card(B\backslash A) + card(A \cap B)$. Remarquons enfin que $A \cup B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B)$ (encore une union disjointe !), donc $card(A \cup B) = card(A\backslash B) + card(B\backslash A) + card(A \cap B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$. □

*Remarque* 3. On peut généraliser ce résultat à la réunion de trois ensembles : $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$. On peut même généraliser à la réunion de $n$ ensembles, cf feuille d'exercices.

**Proposition 8.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis, alors leur produit cartésien $E \times F$ est fini et $card(E \times F) = card(E)card(F)$.

*Démonstration.* Il existe deux bijections $f : \{1; \dots ; n\} \to E$ et $g : \{A; \dots ; p\} \to F$. En définissant $h$ sur $\{1; \dots ; n\} \times \{1; \dots ; p\}$ par $h(i, j) = (f(i), g(j))$, on obtient une bijection vers $E \times F$ (c'est très facile le vous le laisse). Reste à prouver que $\{1; \dots ; n\} \times \{1; \dots ; p\}$ est en bijection avec $\{1; \dots ; np\}$, ce qui est vrai en posant par exemple $z(i, j) = (i - 1)p + j$. Elle est injective : supposons que $(i - 1)p + j = (i' - 1)p + j'$, alors $j' - j = p(i - i')$. mais comme $j$ et $j'$ sont compris entre 1 et $p$, $j - j'$ n'est divisible par $p$ que si $j = j'$, et si ce n'est pas le cas on doit avoir $i - i' = 0$. dans le sdeux cas, les couples sont en fait égaux et $z$ est donc injective. De plus elle est surjective : si $k \leqslant np$, $k = E(\frac{k}{p})p + (k - E(\frac{k}{p})p)$, et $0 \leqslant E(\frac{k}{p})p \leqslant n - 1$, il joue donc le rôle de $i - 1$ ; et $k - E(\frac{k}{p})p \in \{0; \dots ; p - 1\}$. □

*Remarque* 4. Une conséquence immédiate de cette remarque est $card(E^k) = (card(E))^k$, c'est-à-dire qu'on peut former $n^k$ listes de $k$ éléments (éventuellement répétés) dans un ensemble à $n$ éléments.

# 3 Suites, sommes, produits

**Définition 2.** Soit $E$ un ensemble, on appelle suite d'éléments de $E$ un ensemble d'éléments de $E$ indexé par $\mathbb{N}$. On le note habituellement $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$.

**Définition 3.** Si $E = \mathbb{R}$ (ou $E = \mathbb{C}$), la suite est dite arithmétique lorsque $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$. La suite est dité géométrique si $\exists q \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Dans les deux cas, le réel ($a$ ou $q$) est appelé raison de la suite.

**Définition 4.** Soit $E$ un ensemble muni d'une opération d'addition, et $I$ un ensemble fini. On note $\sum_{i \in I} x_i$ la somme de tous les éléments $x_i$, pour $i$ variant dans l'ensemble $i$. En particulier, si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $x_n + x_{n+1} + \cdots + x_p = \sum_{i=n}^{p} x_i$.

*Remarque* 5. Si l'ensemble $I$ est vide (donc en particulier si $n > p$ dans le deuxième exemple, on convient que la somme est nulle. On peut également utiliser la seconde notation avec $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

*Remarque* 6. La lettre $i$ est une variable muette, qui peut être remplacée par n'importe quel autre symbole sans incidence sur la valeur de la somme.

**Définition 5.** Pour $x \in E$, on notera $\sum_{k=1}^{n} x = nx$.

Pour la suite, on ne considèrera plus que $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.

**Proposition 9.** On a $\forall n \leqslant p \leqslant q \in \mathbb{N}^3$, $\sum_{k=n}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{q} x_k = \sum_{k=n}^{q} x_k$, et $\forall a \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a $\sum_{k=n}^{p} ax_k = a \sum_{k=n}^{p} x_k$.

*Démonstration.* Ces propriétés découlent immédiatement de l'associativité de la somme et de la distributivité du produit sur la somme. □

**Proposition 10.** Changement d'indice : difficile de donner un énoncé précis. Il s'agit juste de modifier l'intervalle de variation de l'indice et la valeur des termes en conséquence. Par exemple, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j}$, en posant $j = k - 1$.

**Proposition 11.** Simplification télescopiques : un énoncé idiot mais utile. On a $\sum k = n^p(x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_n$.

**Exemple classique :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

**Proposition 12.** Les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{p}x_{i,j})$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}x_{i,j}$ sont égales, on note plus simplement le résultat $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}x_{i,j}$. De même, on a également $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}x_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}x_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}x_{i,j}$.

*Démonstration.* Il suffit de mettre les éléments dans de jolis tableaux et de constater que les différentes sommes donnent bien la même chose. □

**Proposition 13.** Il faut connaitre les valeurs des sommes classiques suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$.

*Démonstration.* La première formule a déjà été prouvée par récurrence. Pour la deuxième, on va faire de même : pour $n=1$, on a bien $\displaystyle\frac{1\times2\times3}{6}=1=\sum_{k=1}^{1}k^2$. Supposons l'égalité vraie au rang $n$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Par récurrence, le formule est vérifiée. De même pour la somme des cubes : pour $n=1$, $\displaystyle\frac{1^2\times2^2}{4}=1=\sum_{k=1}^{n}k^3$, et en supposant la formule vraie au rang $n$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, ce qui conclut la preuve. □

**Proposition 14.** Somme de suites arithmétiques et géométriques.

Soit $u_n$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $q$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.

Soit $u_n$ une suite géometrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$. Si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)u_0$. Si $q\neq1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

*Démonstration.* Pour la suite arithmétique, constatons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+na$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}u_0+na=(n+1)u_0+a\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)(u_0+\frac{na}{2})=(n+1)(\frac{u_0+u_0+na}{2})=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.
Pour la suite géometrique, c'est évident si $q=1$. Sinon, on peut constater que $(1+q+q^2+\cdots+q^n)(1-q)=1-q^{n+1}$ (somme télescopique), donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^ku_0=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

### 3.1 Produits

**Définition 6.** Comme dans le cas de la somme, on utilise une notation $\prod_{i\in I}$ ou $\prod_{k=n}^{p}$ pour indiquer des produits de réels ou de complexes, ou plus généralement d'éléments dans un ensemble muni d'un produit.

**Définition 7.** On note $\prod_{k=1}^{n} x = x^n$. On note par ailleurs $\prod_{k=1}^{n} k = k!$ (factorielle de l'entier $n$). Par convention, on pose $0! = 1$. Plus généralement, un produit vide est par convention égal à 1.

**Proposition 15.** Par associativité du produit, on a $\prod_{k=n}^{p} x_k \prod_{k=p+1}^{q} x_k = \prod_{k=n}^{q} x_k$.

**Proposition 16.** Il existe un équivalent des sommes télescopiques pour les produits : $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$.

**Proposition 17.** On a les mêmes propriétés sur les doubles produits que sur les doubles sommes : $\prod_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{p} x_{i,j})$ et $\prod_{j=1}^{p}\prod_{i=1}^{n} x_{i,j}$ sont égaux, ce qu'on note plus simplement $\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} x_{i,j}$. De même, on a $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} x_{i,j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} x_{i,j}$.

# 4 Combinatoire

## 4.1 Cardinaux d'ensembles d'applications

**Proposition 18.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs $n$ et $p$. Alors $\mathcal{F}(E, F)$ (ensemble des applicastions de $E$ dans $F$ est fini, et son cardinal est $p^n$.

*Démonstration.* Définir une application de $E$ dans $F$ est exactement la même chose que déterminer une liste de $n$ éléments dans $F$ (éventuellement répétés, puisque l'application peut être quelconque), qui seront les images respectives des $n$ éléments de $E$ (on choisit un ordre quelconque sur les éléments de $E$). Le nombre d'applications est donc le même que celui de $n$-listes dans $F$, dont on a vu plus haut qu'il valait $p^n$. $\square$

**Proposition 19.** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal $2^n$.

*Démonstration.* Il suffit en fait de remarquer que la donnée d'un élément de $\mathcal{P}(E)$ est équivalente à la donnée des éléments de $E$ appartenant au sous-ensemble considéré. On peut alors associer à tout élément $A$ de $\mathcal{P}(E)$ une application $\chi_A : E \to \{0; 1\}$ (fonction caractéristique de l'ensemle $A$), en posant $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette application est surjective : si on considère une application $f : E \to \{0; 1\}$, elle est l'application caractéristique de l'ensemble $A = \{x \in E \mid f(x) = 1\}$ ; et elle est injective : si $\chi_A = \chi_B$, cela signifie que chaque élément de $A$ appartient à $B$, et réciproquement, donc $A = B$. On déduit ce raisonnement que $\mathcal{P}(E)$ a même cardinal que $\mathcal{F}(E, \{0; 1\})$, qui est de cardinal $2^n$ d'après la proposition précédente. $\square$

**Proposition 20.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs $p$ et $n$. Alors le nombre d'injections de $E$ dans $F$ est $\frac{n!}{(n-k)!}$.

*Démonstration.* Nous nous contenterons d'une démonstration « avec les mains » pour bien comprendre le résultat. Supposons $E = \{1; \dots; k\}$, ce qui ne change rien au résultat. Soit $f$ une application injective de $E$ dans $F$, notons $x_i = f(i)$. Comme $f$ est injective, les $x_i$ sont des éléments distincts de $F$. On a donc $n$ possibilités de choix pour $x_1$, puis ensuite seulement $n-1$ pour $x_2$, $n-2$ pour $x_3$, jusqu'à $n-k+1$ pour $x_k$, soit au total $n(n-1)\dots(n-k+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{(n-k)(n-k-1)\dots 1} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ applications disctinctes possibles. □

**Définition 8.** On note $A_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, aussi appelé nombres d'arrangements de $k$ objets parmi $n$ (puisque, en identifiant $E$ à $\{1; \dots; k\}$, se donner une application injective de $E$ dans $F$ revient à se donner une liste de $k$ éléments de $F$, avec ordre imposé.

*Remarque* 7. Ces arrangements ne sont bien sûr non nuls que si $0 \leqslant k \leqslant n$.

**Proposition 21.** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Le nombre d'applications bijectives de $E$ dans lui-même (aussi appelées permutations de $E$) vaut $n!$.

*Démonstration.* C'est une simple conséquence du résultat précédent, appliqué à $E$ et $E$ lui-même : il existe $\dfrac{n!}{0!} = n!$ applications injectives de $E$ dans $E$. Or une application injective entre ensembles de même cardinal est bijective, d'où le résultat. □

## 4.2 Coefficients binomiaux

**Proposition 22.** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Le nombre de sous-ensembles de $E$ à $k$ éléments vaut $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (on suppose naturellement $0 \leqslant k \leqslant n$.

*Démonstration.* On va procéder par récurrence sur $n$. Si $n = 0$, on ne peut avoir que $k = 0$, et il y a un sous-ensemble de $E$ à 0 éléments, c'est $E$ lui-même. Or, $\dfrac{0!}{0!0!} = 1$, donc le résultat est vérifié. Supposons-le vrai au rang $n$ (quelle que soit la valeur de $k$). Le nombre de parties à 0 éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments sera toujours 1, ce qui est cohérent avec la formule. Supposons désormais $k \geqslant 1$, et intéressons-nous aux parties à $k$ éléments d'un ensemble à $n+1$ éléments. Isolons un élément $x_0 \in E$ et séparons ces parties en deux paquets : celles qui contiennent $x_0$ et celles qui ne le contiennent pas. Ces deux paquets sont clairement formés de parties distinctes, et toute partie appartient à un de ces deux paquets. Le deuxième paquet contient, par hypothèse de récurrence, $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ parties puisqu'une fois $x_0$ exclu, il faut choisir $k$ éléments parmi les $n$ restants. Le premier paquet contient quand à lui $\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$ parties puisqu'il suffit cette fois de choisir $k-1$ éléments parmi les $n$ restants. On a donc au total $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{(n-k+1)n! + kn!}{k!(n-k+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$, ce qui prouve la formule. □

**Définition 9.** On note $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ou encore $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Ces combres sont appelés coefficients binomiaux.

*Remarque* 8. Une autre façon de voir les choses est de ramener le calcul des coefficients binomiaux à celui des arrangements. Un arrangement est une partie à $k$ éléments de $E$ dans laquelle on a imposé un ordre. Autrement dit, si on compte le nombre de $k$-arrangements de $E$, on compte toutes les parties à $k$ éléments plusieurs fois. Plus précisément, on compte chacune $k!$ fois, puisqu'il y a $k!$ permutations possibles d'une partie à $k$ éléments. On a donc $C_n^k = \dfrac{A_{n,k}}{k!}$.

**Proposition 23.** Les coefficients binomiaux vérifient notamment les propriétés suivantes :

- $\forall 0 < k \leqslant n,\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $\forall 0 \leqslant k \leqslant n,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\forall 0 < k \leqslant n,\ \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

*Démonstration.* La première propriété a déjà été démontrée et utilisée dans la démonstration précédente. La deuxième est évidente, il suffit de remarquer que changer $k$ par $n-k$ ne fait que permuter les deux termes du dénominateur dans la définition du coefficient binomial. Enfin, pour la troisième : $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

**Définition 10. Triangle de Pascal**

La première relation de la propriété précédente permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche sous forme de tableau, connu sous le nom de triangle de Pascal :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

**Théorème 2. Formule du binome de Newton**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

*Démonstration.* C'est une récurrence classique. Pour $n = 0$, ça marche (les deux membres sont égaux à 1). Supposons la formule vraie au rang $n$, alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$. □

**Proposition 24.** On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

*Démonstration.* Deux façons (au moins) de prouver ce résultat : la première utilise simplement le binome de Newton avec $a = b = 1$ ; la seconde consiste à constater qu'on est en train de compter le nombre de parties d'un ensemble $E$ à $n$ éléments (on fait la somme du nombre de parties à $k$ éléments pour $k$ variant entre 0 et $n$), qui vaut $2^n$. □