TD n°2 : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

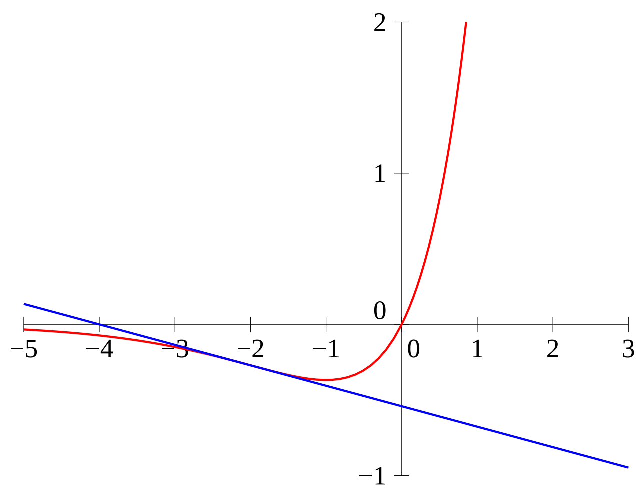
4 octobre 2007

Étude de la fonction de Lambert

1. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable comme produit de fonction continues et dérivables et sa dérivée vaut $g'(x) = (1+x)e^x$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ (croissance comparée), et $g(-1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. En $-\infty$, l'axe (Ox) est asymptote horizontale, et en $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$, donc il y a une branche parabolique de direction (Oy).
3. La fonction g' est dérivable pour les mêmes raisons que g, de dérivée $g''(x) = (2+x)e^x$. Il y a donc un point d'inflexion poue $x = -2$. Comme $g(-2) = -2e^{-2} = -\dfrac{2}{e^2}$ et $g'(-2) = -\dfrac{1}{e^2}$, l'équation de la tangente en ce point est $y = -\dfrac{1}{e^2}(x+2) - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x+4)$.
4. Évidemment, avec des outils graphiques c'est plus facile :



@

5. La fonction g étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $[-\frac{1}{e}; +\infty[$. Sa réciproque h est strictement croissante sur cet intervalle. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

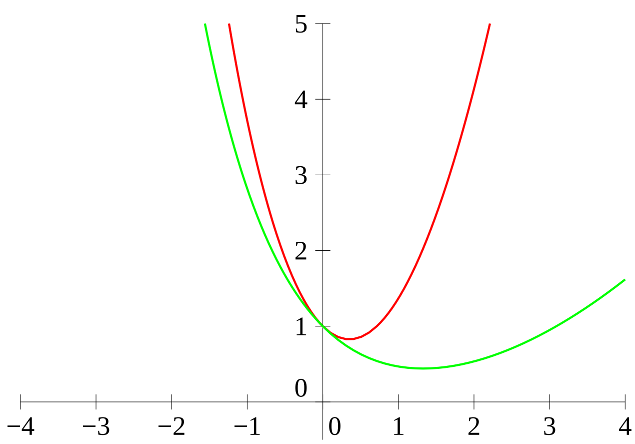
6. La fonction h est dérivable sur $]-\frac{1}{e};+\infty[$, puisque la dérivée de g s'annule en -1 (dont l'image est $-\frac{1}{e}$. On a $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{(1+h(x))e^{h(x)}}$. Or, h étant la réciproque de g, $\forall x \in [-\frac{1}{e};+\infty[$, $g \circ h(x) = x$, c'est-à-dire $h(x)e^{h(x)} = x$. En remplaçant dans la dérivée, on obtient l'expression plus simple $h'(x) = \frac{1}{x+e^{h(x)}}$. Quand x tend vers $+\infty$, le dénominateur tend très fortement vers $+\infty$, donc la limite de h' vaut 0. Et en $-\frac{1}{e}^+$, $e^{h(x)}$ tend vers -1^+, donc $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}^+} h'(x) = +\infty$.

7. La fonction f_{lambda} est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'_{lambda}(x) = 2\lambda x - e^{-x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $2\lambda x = e^{-x}$, ou encore $2\lambda x e^{x} = 1$, soit $g(x) = \frac{1}{2\lambda}$. Comme $\lambda > 0$, $\frac{1}{2\lambda} > 0$, et les variations de g nous indiquent alors que $\frac{1}{2\lambda}$ a un unique antécédent m_λ, appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. La limite de f_λ, en $+\infty$ comme en $-\infty$, vaut $+\infty$. Comme f_λ est toujours positive et que $f_\lambda(0) = 1$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$+\infty$		0		m_λ		
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	> 0	↗	$+\infty$

8. D'après ce qui précéde, $g(m_\lambda) = \frac{1}{2\lambda}$. Comme de plus m_λ appartient à l'intervalle sur lequel g est bijective de réciproque h, on a $m_\lambda = h\left(\frac{1}{2\lambda}\right)$. On a donc $f_\lambda(m_\lambda) = e^{-h(\frac{1}{2\lambda}} + \lambda m_\lambda^2$. Or $h(x)e^{h(x)} = x$, donc $e^{-h(x)} = \frac{h(x)}{x}$, d'où $f_\lambda(m_\lambda) = 2\lambda h(\frac{1}{2\lambda}) + \lambda m_\lambda^2 = \lambda m_\lambda(2+m_\lambda)$.

9. On a $\frac{f_\lambda(x)}{x} = \lambda x + \frac{e^{-x}}{x}$. En $+\infty$, cette expression tend vers $+\infty$, on a donc une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, on peut la mettre sous la forme $\frac{e^{-x}}{x}(1+\frac{\lambda x^2}{e^{-x}})$. La parenthèse tend vers 1, et l'autre facteur vers $-\infty$ (croissance comparée), donc il y a également une branche parabolique de direction (Oy). La courbe représente f_1 en rouge et $f_{\frac{1}{10}}$ en vert :



10. Comme $m : \lambda \mapsto \frac{1}{2\lambda}$, et que la fonction inverse est décroissante et h croissante, m est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Quand λ tend vers 0, $\frac{1}{2\lambda}$ tend vers $+\infty$, donc $h(\frac{1}{2\lambda})$ aussi, d'où $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} m(\lambda) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} m(\lambda) = 0$.

11. Comme $e^{h(x)} = \dfrac{x}{h(x)}$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x} = 1$. Quand $\lambda \to +\infty$, $\dfrac{1}{2\lambda} \to 0$, donc $2\lambda h(\frac{1}{2\lambda}) \to 1$, ce qui donne bien $\lambda m_\lambda \to \dfrac{1}{2}$. Comme h est à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut prendre le ln de la relation initiale : $h(x) = \ln x - \ln(h(x))$, d'où $1 = \dfrac{\ln x}{h(x)} - \dfrac{\ln(h(x))}{h(x)}$. Le deuxième terme dans le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (par croissance comparée), donc $\dfrac{\ln x}{h(x)} \to 1$. Quand $\lambda \to 0$, $\dfrac{1}{2\lambda} \to +\infty$, donc $\dfrac{-\ln(2\lambda)}{m_\lambda} \to 1$, d'où $\dfrac{m_\lambda}{\ln 2 + \ln \lambda} \to -1$. En factorisant par $\ln\lambda$ au dénominateur, on peut « faire disparaitre » le $\ln 2$, et obtenir la deuxième limite demandée.
12. Pour une fois, ça se fait à la main : supposons $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. On a vu ci-dessus qu'on avait alors $0 < m_{\lambda_2} < m_{\lambda_1}$. Or, la fonction f_{λ_1} est strictement décroissante sur $[0; m_{\lambda_1}]$, donc $f_{\lambda_1}(m_{\lambda_2}) > f_{\lambda_1}(m_{\lambda_1})$. mais pour tout réel positif x, $f_{\lambda_2}(x) > f_{\lambda_1}(x)$ (il suffit de revenir à la définition de ces fonctions), donc on a a fortiori $f_{\lambda_2}(m_{\lambda_2}) > f_{\lambda_1}(m_{\lambda_1})$, ce qui prouve que θ est strictement croissante.
13. Quand $\lambda \to +\infty$, on a d'après les question précédentes $m_\lambda \to 0$ et $2\lambda m_\lambda \to 1$, donc $f_\lambda(m_\lambda) = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2) \to 1$. Quand $\lambda \to 0$, on a $m_\lambda \to +\infty$, et $\dfrac{m_\lambda}{\ln\lambda} \to -1$, donc $\lambda m_\lambda(m_\lambda + 2) = \lambda(\ln\lambda)^2 \dfrac{m_\lambda}{\ln\lambda}\dfrac{m_\lambda + 2}{\ln\lambda} \to 0$ (les deux derniers termes tendent vers -1, et le reste vers 0 par croissance comparée.
14. On peut en effet poser $\theta(0) = 0$. Mais comme $\dfrac{\theta(\lambda)}{\lambda} = m_\lambda(m_\lambda + 2) \to +\infty$, ce prolongement n'est pas dérivable. Il y a une demi-tangente verticale en 0.
15. Je me passe de la courbe représentative, vous êtes capables de faire une courbe croissant de 0 à 1 avec une tangente verticale au départ, et c'est moins facile que ça n'en a l'air avec un ordi.