TD n°2 : un exemple de problème

PCSI 2 Lycée Pasteur

4 octobre 2007

1 Étude de la fonction de Lambert

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. Étudier les branches infinies de g.
3. Étudier l'existence d'un réel annulant la dérivée seconde de g (point d'inflexion). Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
4. Représenter $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente précedente.
5. Montrer que $g_{|[-1;+\infty[}$ est bijective vers un intervalle à préciser. On note h sa réciproque. Donner le tableau de variations de h.
6. Quel est le domaine de dérivabilité de h ? Calculer la dérivée de h et étudier ses limites aux bornes du domaine de dérivabilité.
7. Soit $\lambda > 0$, on note f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = e^{-x} + \lambda x^2$, et $\mathcal{C}_\lambda$ sa courbe représentative. Étudier les variations de f_λ.
8. On note m_λ le point où f_λ admet un minimum. Exprimer m_λ en fonction de λ et de h. Montrer que $f_\lambda(m_\lambda) = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2)$.
9. Étudier les branches infinies de f_λ et donner l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.
10. On note m la fonction $\lambda \mapsto m_\lambda$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la monotonie de m et ses limites aux bornes de son domaine de définition.
11. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda m_\lambda = \dfrac{1}{2}$, et $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{m_\lambda}{\ln \lambda} = -1$.
12. On définit maintenant $\theta : \lambda \mapsto f_\lambda(m_\lambda)$. Montrer que θ est croissante.
13. Déterminer les limites de θ en $+\infty$ et en 0^+.
14. On peut prolonger θ par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable ?
15. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction θ.