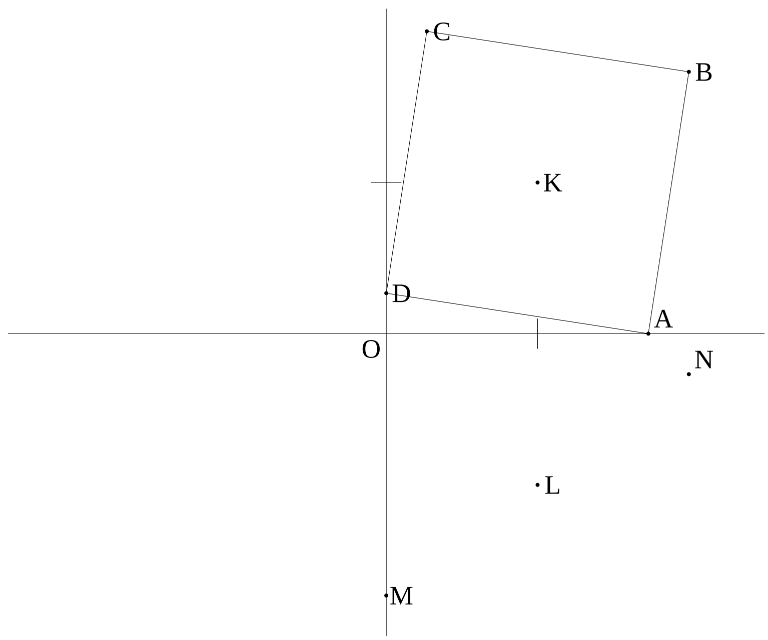
TD n°1 : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

10 septembre 2007

Exercice 1

1. On peut passer par le discriminant réduit pour alléger un tout petit peu : $\Delta' = 1-2 = -1 = i^2$, donc les deux solutions de l'équation sont $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-i$.
2. C'est pas encore pour demain que j'arriverai à faire mes figures rapidement, mais au moins ça marche :



3. Plusieurs façons de déterminer l'affixe de N, par exemple en utilisant que $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{LM}$, donc $z_N - z_L = z_L - z_M$ et $z_N = 2z_L - z_M = 2 + i(-2+\sqrt{3}$. Pour les autres, on utilise les formules du cours : $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_M = iz_M = \sqrt{3}$; $z_C = iz_N = 2 - \sqrt{3} + 2i$; $z_D = z_M + 2i = i(2-\sqrt{3})$ et $z_B = z_N + 2i = 2 + i\sqrt{3}$.
4. C'est un simple calcul : $\dfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2i) = 1 + i = z_K$ et $\dfrac{1}{2}(z_B + z_D) = \dfrac{1}{2}(2 + i\sqrt{3} + 2i - i\sqrt{3}) = 1 + i = z_K$. Le point K est donc bien le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$.
5. D'après la question précédente, $ABCD$ est un parallélogramme, mais la figure suggère que c'est en fait un carré. Pour le prouver, il suffit par exemple de montrer que D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que $z_D - z_A = i(z_B - z_A)$. Or, $z_D - z_A = -\sqrt{3} + i(2-\sqrt{3})$ et $i(z_B - z_A) = i(2 + i\sqrt{3} - \sqrt{3}) = -\sqrt{3} + i(2-\sqrt{3})$. L'égalité étant vérifiée, $ABCD$ est bien un carré.

Exercice 2

1. Considérons donc une fonction polynome de degré 2 $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$, elle a pour dérivée $p' : x \mapsto 2ax+b$, et est donc solution de (E) si et seulement si $2ax+b+2ax^2+2bx+2c = 3x^2-1$, soit $2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c = 3x^2 - 1$. Deux polynomes sont égaux uniquement si tous leurs coefficients sont égaux, on obtient donc par identification $a = \frac{3}{2}$; $a + b = 0$, donc $b = -\frac{3}{2}$ et $b + 2c = -1$, donc $c = \frac{-1-b}{2} = \frac{1}{4}$. Il y a donc bien une unique fonction polynome de degré 2 solution de (E), il s'agit de $p : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$.
2. C'est du cours (ou du moins ça le sera très bientôt. Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto ke^{-2x}$, k étant une constante réelle quelconque.
3. En effet, $f - p$ est solution de $(E') \Leftrightarrow (y-p)' + 2(y-p) = 0 \Leftrightarrow y' + 2y = p' + 2p = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f$ est solution de (E).
4. Les solutions de (E) sont donc de la forme $f + p$, où f est une solution de (E'), il s'agit de toutes les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Pour que la suite soit bien définie, il faut avoir à chaque rang $1 + u_n \geqslant 0$. Prouvons-le par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 0$, et si l'hypothèse est vérifiée au rang n, on a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ qui est bien défini et positif, donc en particulier $1 + u_{n+1} \geqslant 0$. La suite est donc bien définie.
2. Si $f(x) = x$ alors $1 + x = x^2$ (mais la réciproque n'est pas vraie), donc $x^2 - x - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 4 = 5$, et ses deux solutions sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. La première solution, négative, est à rejeter puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$, donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. On peut par exemple calculer la dérivée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, qui est toujours positive, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, donc si $0 \leqslant a < b$, $\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b \frac{1}{2}\, dx$, ce qui donne $f(b) - f(a) \leqslant \frac{1}{2}(b-a)$. C'est l'inégalit demandée, à la valeur absolue près, mais celle-ci ne pose pas de problème (on peut toujours décider d'appeler b le plus grand des deux réels considérés).
4. L'inégalité est vraie pour u_0 puisque $\varphi \geqslant 0$, et si on la suppose vraie pour u_n, on a en utilisant la croissance de f $f(u_n) \leqslant f(\varphi)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite, et $f(\varphi) = \varphi$ par définition de φ, donc on obtient $u_{n+1} \leqslant \varphi$, ce qui clôt la récurrence.
5. Il suffit d'appliquer le résultat démontré à la question 3. pour $a = u_n$ et $b = \varphi$. On obtient $|f(u_n) - f(\varphi)| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \varphi|$, soit $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \varphi|$. On peut en déduire, par récurrence, que $|u_n - \varphi| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \varphi|$. C'est en effet vrai pour $n = 0$ (et c'est même une évidence) et, en le supposant vrai au rang n, on aura en utilisant le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence $|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \varphi| \leqslant \frac{1}{2}.\frac{1}{2^n}|u_0 - \varphi| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \varphi|$.

On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier n, $0 \leqslant |u_n - \varphi| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \varphi|$. Or, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n \to +\infty}(u_n - \varphi) = 0$, ce qui signifie exactement que φ est la limite de la suite u_n.

6. Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{5}$, il suffit d'en obtenir une à $\frac{10^{-3}}{2}$ près de φ. Or, la distance entre les termes de la suite est divisée par 2 à chaque étape et $\varphi - u_0 \leqslant 2$. On aura donc $\varphi - u_{12} \leqslant \frac{1}{2^{11}} < \frac{10^{-3}}{2}$. Le nombre $2u_{12} - 1$ sera alors une approximation de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x+1-(2x+1)\ln x$ et $g(x) = \frac{\ln x}{x^2+x}$.

1. Commençons par rappeler que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ et calculons les limites aux bornes de ce domaine de définition. On a $\lim_{x \to 0^+}(2x+1)\ln x = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici) donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, on peut factoriser par x : $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - 2\ln x - \frac{\ln x}{x}\right)$. La parenthèse a pour limite $-\infty$ (le seul terme ayant une limite infinie est $-2\ln x$, rappelons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$), donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   Passons à l'étude des variations : $f'(x) = 1 - 2\ln x - 2 - \frac{1}{x} = -1 - 2\ln x - \frac{1}{x}$, dont le signe n'a rien d'évident. Dérivons donc une deuxième fois : $f''(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2}$. On obtient alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$2\ln 2 - 3 < 0$	$\searrow$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

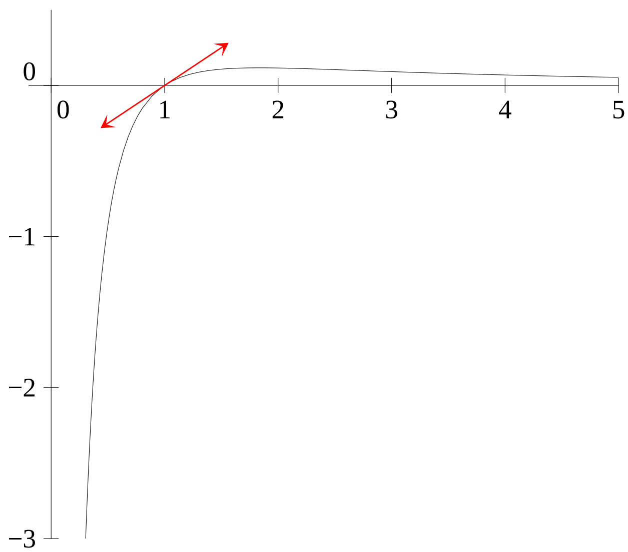
   La fonction étant strictement décroissante et prenant des valeurs des deux signes, elle s'annule exactement une fois. Pour obtenir une valeur approchée (grossière) de α, calculons quelques valeurs : $f(1) = 2$; $f(2) = 3 - 5\ln 2 \simeq -0.5$, donc α est légèrement inférieur à 2.

2. Calculons donc la dérivée de g : $g'(x) = \frac{x+1+(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{f(x)}{(x^2+1)^2}$. De plus, on a $g(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2+\alpha} = \frac{\alpha+1}{(2\alpha+1)(\alpha^2+\alpha)} = \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$ puisque, α étant la valeur d'annulation de f, on a $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. Remarquons qu'en prenant $\alpha \simeq 2$, on obtient $g(\alpha) \simeq \frac{1}{10}$. Le tableau de variations de g est donc

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$	$\searrow$	0

(les limites seront calculées à la question suivante).

3. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$ et comme pour $x \geqslant 1$, $0 \geqslant g(x) \geqslant \dfrac{\ln x}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Quand à l'équation de la tangente au point d'abscisse 1, comme $g(1) = 0$ et $g'(1) = \dfrac{f(1)}{4} = \dfrac{1}{2}$, elle est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$. On obtient l'allure suivante pour la fonction :



4. C'est en fait tout simple, on a déjà remarqué que, si $x \geqslant 1$, $g(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$, donc $\displaystyle\int_1^\lambda g(x)\ dx \leqslant \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\ dx$ (attention tout de même, il est important d'avoir $\lambda \geqslant 1$ pour que l'inégalité soit valable sur l'intervalle d'intégration).

5. On va effectuer une intégration par parties : en posant $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\ dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{\ln\lambda}{\lambda} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda = \frac{-\ln\lambda}{\lambda} + 1 - \frac{1}{\lambda}$. En étudiant cette fonction de λ, on peut constater qu'elle est croissante, vaut 0 en 1 et tend vers 1 en $+\infty$, ce qui permet de voir que l'aire sous la partie de $\mathcal{C}_g$ qui se trouve à droite de l'abscisse 1 est plus petite que 1.