Devoir Surveillé n°1 : Corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

Samedi 22 Septembre 2007

Exercice 1

1. On aplique simplement la définition : $P_2(X) = 2XP_1(X) - P_0(X) = 2X^2 - 1$, puis $P_3(X) = 2XP_2(X) - P_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$.
2. On va prouver cette propriété par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $P_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0)$ et pour $n = 1$, on a $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, donc ça marche (d'ailleurs, les calculs de la question précédente associés aux formules de duplication et de triplication du cosinus montrent que le résultat est bien vérifié également pour $n = 2$ et $n = 3$). Supposons donc le résultat vérifié à tous les rangs inférieurs ou égaux à $n \geq 1$ et regardons ce qui se passe au rang $n+1$: $P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta(P_n(\cos\theta))^2 - P_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$ par hypothèse de récurrence. Il ne reste plus qu'à appliquer une formule de transformation produit/somme : $2\cos\theta\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$. Reste bien $P_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$, ce qui achève la récurrence.
3. On va également prouver par récurrence que P_n est à coefficients entiers et de coefficient dominant 2^{n-1} (ce qui se conjecture facilement au vu du calcul des premiers polynomes). On va même ajouter dans l'hypothèse que P_n est de degré n. P_0 et P_1 vérifient bien ces hypothèses, et en les supposant vérifiées pour tous les rangs inférieurs ou égaux à $n \geq 1$, on a $P_{n+1}(X) = 2X(2^{n-1}X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_0) - 2^{n-2}X^{n-1} - p'_{n-2}X^{n-2} - \cdots - p'_0$, où les coefficients p_i et p'_i sont des entiers (hypothèse de récurrence). En développant tout ceci, on obtient bien un polynome de degré n à coefficients entiers et de coefficient dominant 2^n, ce qui achève la récurrence.
4. D'après la question 2, si $\cos(n\theta) = 0$, alors $\cos\theta$ est une racine de P_n. Or, $\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \dfrac{\pi}{2n}\left[\dfrac{\pi}{n}\right]$. Toutes les valeurs de θ vérifiant cette égalité et comprises entre 0 et π ont des cosinus différents. Or, il y a exactement n telles valeurs, qui sont de la forme $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, pour $0 \leq k \leq n-1$. Les racines de P_n sont donc $\mathcal{S} = \left\{\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \mid k \in \{0;\ldots;n-1\}\right\}$.
5. On peut le faire très rigoureusement par récurrence, mais le raisonnement suivant m'aurait suffi : si on connait les racines de P, on a donc $P(X) = p_n(X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n)$. En développant ce produit, on doit retomber sur P. Or, le coefficient constant du développement vaut $p_n(-z_1).(-z_2)\ldots(-z_n)$ (tous les autres termes font apparaitre X), donc $p_n(-1)^n z_1 \ldots z_n = p_0$, d'où la première formule. Pour la somme, considérons le coefficient de X^{n-1} dans le développement. Les termes en X^{n-1} proviennent de produits où on choisit X dans $n-1$ parenthèses, et une des racines dans la dernière. Il y a n tels termes, dont la somme vaut $-p_n(z_1 + \cdots + z_n)X^{n-1}$, qui doit être égale à $-p_{n-1}$, dont on déduit l'autre formule.
6. On a vu à la question 4 que ces cosinus étaient justement les racines du polynome P_n, donc d'après la question, on peut exprimer somme et produit en fonction des coefficients dudit polynome. On a déjà prouvé que le coefficient dominant valait 2^{n-1}. Le second coefficient vaut 0 (pour $n \geq 1$), ce qui se prouve aussi par récurrence : c'est vrai pour P_1 et P_2, et si on reprend le calcul de la question 3 en supposant $p_{n-1} = 0$, on constate que P_{n+1} a

également un deuxième coefficient nul. C'est donc le cas de tous les polynomes de la suite. La somme des cosinus demandés est donc nulle (ce qui se prouve d'ailleurs facilement en utilisant $\cos x = -\cos(\pi - x)$.

Pour le produit, il faut calculer le coefficient constant de P_n, ce qui se fait une fois de plus par récurrence. On constate au vu de la relation de récurrence que le coefficient constant de P_{n+2} est opposé à celui de P_n (le terme en $2XP_{n+1}(X)$ ayant un terme constant nul). Comme le coefficient constant de P_1 est nul, ce sera aussi le cas de tous les P_n pour n impair. Par contre, pour $n = 2k$ pair, le coefficient constant vaudra $(-1)^k$. Autrement dit, si n est divisible par 4, il vaut 1, sinon -1. Conclusion : quand n est impair, le produit de cosinus demandé est nul (c'est normal, $\cos \frac{\pi}{2}$ en fait partie). Quand n est multiple de 4, il vaut $\frac{1}{2^{n-1}}$, et quand n est pair mais pas multiple de 4, il vaut $\frac{-1}{2^{n-1}}$.

Par exemple, $\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} = \frac{1}{8}$, et $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{3\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{1}{32}$.

7. Dérivons l'égalité obtenue à la question 2 : la dérivée de $\cos(n\theta)$ vaut $-n\sin(n\theta)$ et celle de $P_n(\cos\theta)$ (fonction composée) vaut $-\sin\theta P_n'(\cos\theta)$. On a donc $\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{P_n'(\cos\theta)}{n}$, d'où $Q_n = \frac{1}{n}P_n'$.

Exercice 2 (d'après Petites Mines 2006)

1. Le domaine de définition de f est évidemment $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ (une question triviale, une).
2. Il vaut mieux procéder de façon algébrique pour obtenir une valeur utilisable des racines carrées. Posons donc $z = a+ib$ et supposons $z^2 = 8-6i$. On a alors $|z^2| = a^2+b^2 = |8-6i| = \sqrt{64+36} = 10$, et Re $(z^2) = a^2 - b^2 = 8$, d'où $2a^2 = 18$ et $2b^2 = 2$, donc $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$. Comme de plus Im $(z^2) = 2ab = -6$, a et b sont de signe contraire, ce qui nous donne les deux racines $z_1 = 3 - i$ et $z^2 = -3 + i$.

   Or, $f(z) = 1 + i \;\Leftrightarrow\; z^2 = (z - 2i)(1 + i) \;\Leftrightarrow\; z^2 - (1 + i)z - 2 + 2i = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = (1 + i)^2 - 4(-2 + 2i) = 8 - 6i$ (quelle surprise !). On a donc deux antécédents possibles qui sont $z_3 = \frac{1+i+3-i}{2} = 2$ et $z_4 = \frac{1+i-3+i}{2} = -1 + i$.
3. Soit $a \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = a \;\Leftrightarrow\; z^2 = a(z - 2i) \;\Leftrightarrow\; z^2 - az + 2ai = 0$. Cette équation a une seule solution quand $a^2 - 8ai = a(a - 8i) = 0$, c'est-à-dire quand $a = 0$ (un seul antécédent qui vaut 0) ou $a = 8i$ (un seul antécédent qui vaut $\frac{a}{2} = 4i$).
4. Il en existe bien entendu, puisqu'on a vu par exemple que $1+i$ avait deux antécédents distincts. Deux complexes z et z' ont même image par f si $\frac{z^2}{z-2i} = \frac{z'^2}{z'-2i}$, soit $z^2z' - 2iz^2 - z'^2z + 2iz'^2 = 0 \Leftrightarrow (z - z')zz' - 2i(z^2 - z'^2) = 0 \Leftrightarrow (z - z')(zz' - 2i(z + z')) = 0$. Comme on cherche z et z' distincts, on doit avoir $zz' - 2iz + 2iz' = 0$, soit $z' = \frac{2iz}{z-2i}$. Il faut encore supprimer les cas où $z' = z$ dans cette dernière égalité, ce qui arrive si $z(z - 2i) = 2iz \Leftrightarrow z^2 - 4iz = 0$, ce qui se produit quand $z = 0$ et $z = 4i$, qui représentent respectivement l'unique antécédent de 0 et celui de $8i$. Les résultats sont donc cohérents avec ceux de la question précédente. Un exemple : pour $z = 1$, on obtient $z' = \frac{2i}{1-2i} = \frac{-4+2i}{5}$.
5. Commençons par constater que $g(z) = (z-2i)(\overline{z}+2i)\frac{z^2}{z-2i} + z^3 = z^2(\overline{z}+2i+z) = 2z^2(\text{Re } z + i)$. En posant $z = x + iy$, on a donc $g(z) = 2(x^2 - y^2 + 2ixy)(x + i) = 2x^3 - 2xy^2 + 4ix^2y + 2ix^2 - 2iy^2 - 4xy = 2x^3 - 2xy^2 - 4xy + i(2x^2 - 2y^2 + 4x^2y)$.

6. D'après le calcul précédent, $g(z)$ est imaginaire pur si $x(2x^2 - 2y^2 - 4y) = 0$, donc si x est imaginaire pur ou appartient à l'ensemble d'équation $x^2 - y^2 - 2 = 0$ (qui est, vous l'apprendrez bientôt, une hyperbole).

Exercice 3

1. La fonction f est 2π-périodique et paire, puisque cos l'est. On peut donc l'étudier sur $[0;\pi]$, puis obtenir sa courbe sur $[-\pi;\pi]$ par symétrie puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité. Par contre, f n'est pas symétrique par rapport à $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ comme l'est le cosinus, on ne peut pas réduire plus l'intervalle d'étude.
2. On peut par exemple utiliser une transformation somme/produit sur les deux cosinus extrêmes, soit $\cos x + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(-x)$. L'équation devient alors $\cos(2x)(1 + 2\cos x) = 0$. On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$, soit $x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

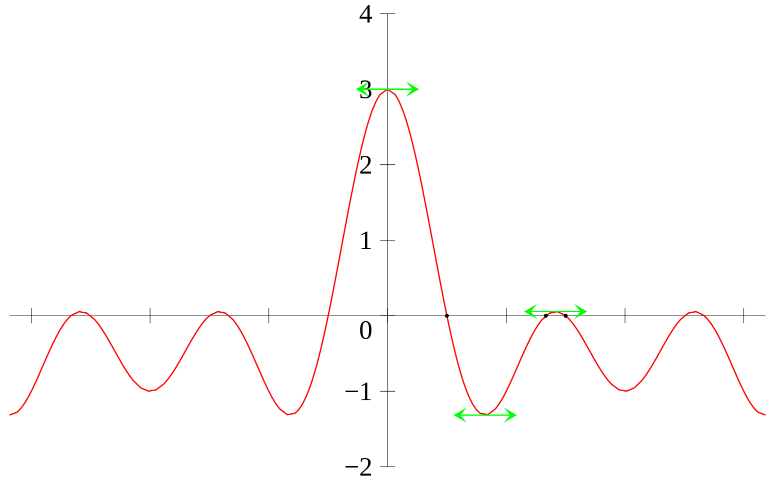
   Si on se restreint à l'intervalle d'étude, f s'annule donc en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	|	$-$	0	$+$	1
$2\cos x + 1$	3	$+$	|	$+$	1	$+$	0	$-$	|	$-$	-1
$f(x)$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-2

3. C'est un calcul assez facile : $f'(x) = -\sin x - 2\sin(2x) - 3\sin(3x) = -\sin x - 4\sin x\cos x - 3(3\sin x - 4\sin^3 x) = -\sin x(1 + 4\cos x + 9 - 12(1 - \cos^2 x)) = -\sin x(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$. Pour en étudier le signe, il faut chercher le signe du trinome $12X^2 + 4X - 2 = 2(6X^2 + 2X - 1)$, qui a pour discriminant réduit $\Delta' = 1 + 6 = 7$, et donc pour racines $X_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{6}$. Ces deux valeurs étant comprises entre -1 et 1, ce sont les cosinus de deux angles θ_1 et θ_2 appartenant à $[0;\pi]$. Au vu du tableau de signes de f (ou d'une calcul de valeur approchée des deux cosinus), $\theta_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\theta_2 \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Le facteur $-\sin x$ étant toujours négatif sur $[0,\pi]$, f' sera positive entre θ_1 et θ_2 et négative ailleurs. On a donc un tableau de variations qui ressemble à ceci :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		θ_1		$\frac{2\pi}{3}$		θ_2		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\theta_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\theta_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

4. La courbe ressemble à ceci (on peut ajouter à l'étude que, pour $x = \frac{\pi}{2}$, f prend la valeur -1 et f' la valeur 2) :



Exercice bonus

Le discriminant de l'équation est $\Delta = a^2 - 4b$ et les deux racines $\dfrac{1}{2}(-a+\delta)$ et $\dfrac{1}{2}(-a-\delta)$, où δ est une racine de Δ.

Les deux racines ont donc même module si (en élevant au carré) $(-a+\delta)(-\overline{a}+\overline{\delta} = (-a-\delta)(-\overline{a}-\overline{\delta})$, soit après avoir développé et réordonné $a\overline{\delta}+\overline{a}\delta = 0$, ou encore $\overline{a}\delta \in i\mathbb{R}$. En élevant au carré, on obtient la condition $\overline{a}^2\Delta \in \mathbb{R}_-$, soit $|a|^2\left(1-4\dfrac{b}{a^2}\right)$. Toutes les étapes du calcul étant des équivalences, une condition nécessaire et suffisante est donc $1-4\dfrac{b}{a^2} \in \mathbb{R}_-$, c'est-à-dire $\dfrac{b}{a^2} \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.

Pour que les deux racines aient même argument, il faut avoir $\dfrac{-a-\delta}{-a+\delta} = \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, soit $-a+\delta = \lambda(-a-\delta)$, dont on déduit $\dfrac{\delta}{a} = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$. En élevant au carré, on a alors $\dfrac{a^2-4b}{a^2} = \left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2$. Une étude rapide de la fonction $t \mapsto \dfrac{1-t}{1+t}$ permet de se convaincre qu'elle prend les valeurs comprises (strictement) entre -1 et 1 quand t parcourt $\mathbb{R}_+^*$, donc on obtient $1-4\dfrac{b}{a^2} \in [0;1[$, d'où $\dfrac{b}{a^2} \in]0;\dfrac{1}{4}]$, ce qui est la condition recherchée.