Devoir Surveillé n°1

PCSI 2 Lycée Pasteur

Samedi 22 Septembre 2007

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont INTERDITES. Les questions ne sont pas nécessairement à traiter dans l'ordre, mais il doit être clair que le résultat d'une question non traitée est admis s'il est utilisé dans la suite de la copie (normalement, il y a largement de quoi faire pour deux heures, n'hésitez pas à sauter des questions). Pensez à soigner votre rédaction. Bon courage.

Exercice 1

On définit, pour tout entier n, le polynome P_n de la façon suivante : $P_0(X) = 1$; $P_1(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$.
3. Montrer que les polynomes P_n sont à coefficients entiers, et calculer leur coefficient dominant.
4. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer les racines de P_n (il ne peut pas y en avoir plus de n). En déduire la factorisation de P_n.
5. Montrer que, si un polynome $P(X) = p_nX^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_1X + p_0$ a pour racines les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, alors $z_1 + \cdots + z_n = -\dfrac{p_{n-1}}{p_n}$ et $z_1 \ldots z_n = (-1)^n \dfrac{p_0}{p_n}$.
6. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
7. Pour tout entier n, montrer l'existence d'un polynome Q_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $Q_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ (indication : il peut être intéressant de dériver P_n).

Exercice 2 (d'après Petites Mines 2006)

On considère la fonction f, qui à un nombre complexe z associe, quand c'est possible,

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer les racines carrées de $8-6i$. En déduire les antécédents de $1+i$ par f.
3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Discuter suivant la valeur de a le nombre d'antécédents de a par f.
4. Existe-t-il des nombres complexes distincts ayant même image par f (une détermination de tous les couples de complexes envoyés par f sur la même valeur sera appréciée) ?
5. On définit désormais $g(z) = |z-2i|^2 \dfrac{z^2}{z-2i} + z^3$ (même ensemble de définition que f). Calculer $g(z)$ (sous forme algébrique ; on pourra partir de $z = x+iy$).
6. On note $A = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in i\mathbb{R}\}$. Montrer que A est inclus dans la réunion d'une droite et d'un ensemble dont on donnera une équation sans chercher à le décrire.

Exercice 3

On s'intéresse à la fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$$

1. Déterminer un intervalle d'étude intelligent pour f.
2. Résoudre l'équation $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$, en déduire le signe de f sur l'intervalle d'étude.
3. Montrer que $f'(x) = -\sin x(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$, en étudier le signe et en déduire les variations de f (on ne cherchera pas à calculer de valeur exacte des minima et maxima locaux).
4. Tracer une allure de la courbe de f (vous pouvez calculer quelques valeurs simples d'images et de nombres dérivés pour compléter l'étude).

Exercice bonus

On considère une équation du second degré à coefficients complexes de la forme $z^2 + az + b$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les deux racines de l'équation aient même module. Même question pour qu'elle aient un même argument.