# Devoir Maison n°3

PCSI 2 Lycée Pasteur

À rendre pour le jeudi 10 novembre

## Exercice 1 : Une équation différentielle inhabituelle

On chercher dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x)+1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse.

1. Soit donc $f$ une telle fonction. Prouver que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par $f$.
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont $g$ est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

## Exrcice 2 : Axe radical de deux cercles

On utilise dans ce problème la notation $\overline{AB}$ pour désigner la mesure algébrique du segment $[AB]$. Cette mesure est, au signe près, la longueur du segment, mais deux segments orientés en sens opposé sur une même droite ont une mesure algébrique de signe opposé.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan de centre $O$ et de rayon $R$ et $M$ un point, on appelle puissance de $M$ par rapport à $\mathcal{C}$ le réel $p_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - R^2$. Aucune figure n'est spécifiquement demandée, mais ça peut toujours servir.

1. Supposons que $M$ appartienne à une droite $D$ coupant $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$. On note $A'$ le point diamétralement opposé à $A$ sur $\mathcal{C}$, montrer que $\overline{MA}.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = p_{\mathcal{C}}(M)$.
2. Supposons $M$ extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et notons $S$ et $T$ les points de contact de $\mathcal{C}$ avec ses tangentes issues de $M$. Indiquer une méthode pour construire $S$ et $T$ à la règle et au compas.
3. Montrer que $MT^2 = MS^2 = p_{\mathcal{C}}(M)$.
4. Montrer que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ tels que $(AB)$ et $(CD)$ ne soient pas parallèles (elles se coupent alors en un point noté $N$) sont cocycliques si et seulement si $\overline{NA}.\overline{NB} = \overline{NC}.\overline{ND}$.
5. On considère désormais deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs $O$ et $O'$ et on note $\Delta$ l'ensemble des points $M$ vérifiant $p_{\mathcal{C}}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$.
   (a) Soit $I$ le milieu de $[OO']$, montrer que $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{IM} = k$, où $k$ est une constante à préciser.
   (b) En déduire la nature de $\Delta$ (appelée axe radical des deux cercles).
   (c) Déterminer l'axe radical de deux cercles dans le cas où ils sont sécants en deux points $A$ et $B$.
   (d) Déterminer l'axe radical de deux cercles quand ils sont tangents en un point $A$.
   (e) Justifier que si trois cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ ont des leurs centres $O$, $O'$ et $O''$ non alignés, les trois axes radicaux définis à partir de ces trois cercles sont concourantse un point $R$, appelé centre radical des trois cercles.
   (f) Décrire une construction géométrique de l'axe radical de deux cercles disjoints, faisant intervenir un troisième cercle sécant aux deux premiers.