Devoir Maison n°2 : Corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

Lundi 15 octobre

Exercice 1 : étude de relations d'ordre

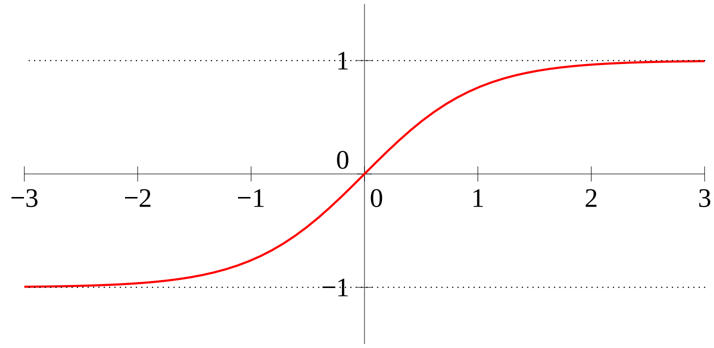
1. R est réflexive puisque tout couple (p,q) est en relation avec lui-même (il vérifie la deuxième condition). Elle est antisymétrique : si $(p,q)R(p',q')$ et $(p',q')R(p,q)$, on a nécessairement $p+q=p'+q'$, et donc $q=q'$ puisqu'on doit avoir à la fois $q \leq q'$ et $q' \leq q$. Mais alors $p=p'+q'-q=p'$, donc les deux couples sont identiques. Enfin, pour la transitivité, supposons $(p,q)R(p',q')$ et $(p',q')R(p",q")$. Si on a $p+q<p'+q'$ ou $p'+q'<p"+q"$, on aura $p+q<p"+q"$ et la relation $(p,q)R(p",q")$ sera vérifiée ; si $p+q=p'+q'=p"+q"$, alors $q \leq q' \leq q"$ et la relation est également vérifiée. La relation R est donc bien une relation d'ordre. Elle est qui plus et totale car on peut toujours comparer deux couples : soit par la première condition (dans un sens ou dans l'autre) si $p+q \neq p'+q'$, soit par la deuxième condition sinon.
2. La plus petit élément de $\mathbb{N}^2$ est tout simplement $(0,0)$ puisque tous les autres couples (p,q) vérifient $p+q>0$, donc $(0,0)R(p,q)$.
3. Le minimum est désormais $(1,0)$. Tous les couples de E^* vérifient $p+q>1$, sauf $(1,0)$ lui-même et $(0,1)$ qui est toutefois plus « grand » que $(1,0)$ à cause de la deuxième condition définissant R.
4. Par définition de E_x, tous les éléments y de E_x vérifient xRy. Le plus petit élément de E_x est donc x lui-même.
5. Soit $x=(p,q)$ et $y=(p',q')$. Tous les éléments (r,s) d'une chaine de tête x et de queue y doivent vérifier $p+q \leq r+s \leq p'+q'$. Or, il n'y a qu'une nombre fini d'éléments de $\mathbb{N}^2$ vérifiant $r+s=k$, k étant un entier fixé. Il y en a même exactement $k+1$, qui sont les couples $(k,0);(k-1,1);\dots(0,k)$ (classés dans l'ordre donné par la relation R). Il y en a donc aussi un nombre fini se situant entre x et y pour la relation R et donc susceptibles de faire partie d'une telle chaine. Il y a donc $\displaystyle\sum_{k=p+q+1}^{p'+q'-1}(k+1)$ éléments vérifiant $p+q<r+s<p'+q'$, auxquels il faut ajouter pour obtenir une chaine maximale les éléments plus grands que x vérifiant $r+s=p+q$ (il y en a $p+1$, qui sont $(p,q);(p-1,q+1);\dots(0;p+q)$), et ceux plus petits que y vérifiant $r+s=p'+q'$ (il y en a cette fois-ci q' : $(p'+q',0);(p'+q'-1,1);\dots;(p',q')$. La longueur maximale vaut donc $p+q'-1+\displaystyle\sum_{k=p+q+1}^{p'+q'-1}(k+1)=p+q'-1+\sum_{t=p+q+2}^{p'+q'}k=$ $p+q'-1+\dfrac{(p'+q')(p'+q'+1)}{2}-\dfrac{(p+q+2)(p+q+3)}{2}$. Tous ces calculs sont effectués en supposant $p+q<p'+q'$, sinon il y a juste $q'-q+1$ éléments dans la chaine maximale).

Exercice 2 : un peu de fonctions

Étude de la fonction φ

1. On peut écrire φ sous la forme $\varphi(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (où on reconnait soit dit en passant la fonction tanh), et on a alors $\varphi(-x)=-\varphi(x)$. La fonction φ est donc impaire.

2. On a (à partir de la forme initiale) $\varphi'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. Cette dérivée étant toujours strictement positive, la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(x) = \dfrac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$; et directement à partir de la forme initiale $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$.

3. 

4. Une fonction strictement croissante est nécessairement injective : si $x \neq x'$, par exemple $x < x'$, alors $\varphi(x) < \varphi(x')$. De plus, φ est surjective vers $]-1;1[$, donc bijective vers cet intervalle.

5. Faisons le calcul à la main : $1 - \varphi^2 = \dfrac{(e^{2x}+1)^2 - (e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \varphi'(x)$.

6. C'est du cours, mais refaisons-le. Sur $]-1;1[$, φ^{-1} est dérivable, et $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \dfrac{1}{(1-\varphi^2)(\varphi'(x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Étude d'une équation fonctionnelle

1. En appliquant l'équation fonctionnelle à $x = 0$, on obtient $f(0)2f(0)$, donc on doit avoir $f(0) = 0$.

2. Quel que soit le réel x, $\dfrac{x}{2^n}$ tend vers 0. Or, $\dfrac{f(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} = \dfrac{f(\frac{x}{2^n}) - f(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}$ d'après le résultat de la question précédente, donc f étant dérivable en 0, la suite converge vers $f'(0)$.

3. Or, on a en utilisant l'équation fonctionnelle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{x}{2^n}) = 2f(\frac{x}{2^{n+1}})$, donc en divisant le tout par $\frac{x}{2^n}$, on obtient $\dfrac{f(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} = 2\dfrac{f(\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{x}{2^n}} = \dfrac{f(\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{x}{2^{n+1}}}$. la suite considérée est donc en fait constante. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} = f'(0)$, et en particulier, pour $n = 1$, $\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$. La fonction f est donc linéaire, de coefficient directeur $f'(0)$. Réciproquement, toutes les fonctions linéaires sont solutions du problème posé.

Une deuxième équation fonctionnelle

1. C'est un calcul absolument passionnant : $\dfrac{2\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)} = \dfrac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1}\dfrac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^2+(e^{2x}-1)^2} = \dfrac{2(e^{4x}-1)}{2e^{4x}+2} = \varphi(2x)$, donc φ est bien une fonction solution du problème posé (elle est dérivable en 0).

2. En appplicant l'hypothèse à $x = 0$, on obtient $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)}$, donc on a soit $f(0) = 0$, soit

$1+f^2(0)=2$, ce qui implique $f(0)=1$ ou $f(0)=-1$. Il y a donc trois valeurs possibles pour $f(0)$.

3. Si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $-f(2x)=\dfrac{-2f(x)}{1+(-f)^2(x)}$, donc $-f$ est également solution.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ est de la forme $\dfrac{2a}{1+a^2}$, où $a=f(\frac{x}{2}) \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de vérifier que $\forall a \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \dfrac{2a}{1+a^2} \leq 1$. Or, $\forall a \in \mathbb{R}$, $(a+1)^2=a^2+1+2a \geq 0$, donc $1+\dfrac{2a}{1+a^2} \geq 0$, ce qui donne la première inégalité, et $(1-a)^2=1+a^2-2a \geq 0$, donc $1 \leq \dfrac{2a}{1+a^2}$, ce qui donne la deuxième.

5. (a) Quel que soit x, $\dfrac{x}{2^n}$ tend vers 0. Or, f est dérivable donc continue en 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=f(0)=1$.

   (b) Comme $\dfrac{x}{2^n}=2\times\dfrac{x}{2^{n+1}}$, on a en utilisant l'équation fonctionnelle $u_n=\dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

   (c) Le nombre $1+u_{n+1}^2$ étant toujours positif, la relation précédente prouve que u_n et u_{n+1} sont de même signe. Une récurrence évidente permet de conclure que tous les termes de la suite sont de même signe. Comme de plus la suite converge vers 1, elle est constituée de termes positifs.

   (d) On a $u_{n+1}-u_n=u_{n+1}\left(1-\dfrac{2}{1+u_{n+1}^2}\right)=\dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2-1)}{1+u_{n+1}^2}$. Tout cela étant négatif, puisque u_{n+1} prend ses valeurs entre -1 et 1, la suite est décroissante. Une suite qui prend ses valeurs entre -1 et 1 et qui décroit vers 1 ne peut qu'être constante égale à 1.

   (e) On a en particulier $u_0=f(x)=1$, donc f est la fonction constante égale à 1.

   (f) On a très similairement une suite u_n qui converge vers -1 mais qui est croissante, donc constante égale à -1, et f est la fonction constante égale à -1. Une autre façon de le voir : si $f(0)=-1$, $-f$ est solution du problème et vérifie $(-f)(0)=1$, donc $-f$ est la fonction constante égale à 1.

6. (a) Supposons qu'il existe une valeur de x telle que $f(x)=1$, alors, en conservant la même notation pour la suite u_n, on démontre par récurrence que u_n est une suite constante égale à 1 : $u_0=1$ et, si $u_n=1$, on a $\dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}=1$, donc $1+u_{n+1}^2-2u_{n+1}=0$, soit $(1-u_{n+1})^2=0$, ce qui implique $u_{n+1}=1$. Or, cette suite constante est censée toujours converger vers $f(0)=0$, c'est absurde. De même, si f prend la valeur -1, la suite est constante égale à -1, ce qui n'est pas possible.

   (b) Notons déjà que φ^{-1} est bien définie car f prend toutes ses valeurs dans $]-1;1[$, qui est l'intervalle de définition de φ^{-1}. La fonction φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable en 0, donc $\varphi^{-1}\circ f$ est dérivable en 0. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}\circ f(2x)=\varphi^{-1}\left(\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}\right)$. Or, f prenant ses valeurs dans $]-1;1[$ comme φ, $\exists y \in \mathbb{R}$, $f(x)=\varphi(y)$, donc $\varphi^{-1}(f(2x))=\varphi^{-1}\left(\dfrac{2\varphi(y)}{1+\varphi^2(y)}\right)=\varphi^{-1}(\varphi(2y))=2y$, car φ elle-même vérifie l'équation fonctionnelle. Mais comme $f(x)=\varphi(y)$, $y=\varphi^{-1}(f(x))$, donc on a en fait $\varphi^{-1}(f(2x))=2\varphi^{-1}(f(x))$, ce qui est exactement l'équation fonctionnelle de la deuxième partie du problème.

   (c) On en déduit que $\varphi^{-1}\circ f(x)=ax$, où a est une certaine constante réelle, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\varphi(ax)=\tanh(ax)$.