

Devoir Maison n°1 : corrigé

PCSI 1 Lycée Pasteur

17 septembre 2007

Première partie : calcul de $\cos \frac{\pi}{5}$

- C'est du cours : les solutions sont $1, e^{2i\frac{\pi}{5}}, e^{4i\frac{\pi}{5}}, e^{6i\frac{\pi}{5}}$ et $e^{8i\frac{\pi}{5}}$.
- Posons $Q(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$, donc $(z-1)Q(z) = az^5 + (b-a)z^4 + (c-b)z^3 + (d-c)z^2 + (e-d)z - e$. Par identification, ce dernier polynôme est égal à $z^5 - 1$ si $a = b = c = d = e = 1$, donc $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

- Lorsque les coefficients d'un polynôme sont symétriques, le changement de variables $Z = z + \frac{1}{z}$ est utile. En effet, on a alors $Z^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$. Prenons l'équation $Q(z) = 0$ et divisons tout par z^2 (on peut car 0 n'est pas une racine), on obtient $z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$, soit $Z^2 + Z - 1 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc deux solutions réelles $Z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Reste à en déduire les valeurs de z . Si $z + \frac{1}{z} = Z_1$, en multipliant par z , on obtient $z^2 - Z_1z + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $Z_1^2 - 4 = 1 - Z_1 - 4 = -Z_1 - 3 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}$ (puisque $Z_1^2 + Z_1 - 1 = 0$). On en déduit les deux solutions $z_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{5+\sqrt{5}}{8}$, et $z_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. De même, si $z + \frac{1}{z} = Z_2$, z sera solution d'une

équation de degré 2 avec discriminant $-Z_2 - 3 = \frac{\sqrt{5}-5}{2}$, tout aussi négatif que le précédent, et on obtient $z_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $z_4 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}; \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}; -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}; -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \right\}$$

- Parmi les quatre solutions non triviales de l'équation, il y en a une sur chaque quart du cercle trigonométrique ; la détermination des signes de la partie réelle et imaginaire de chaque solution suffit donc à faire l'identification. On a en particulier $e^{i\frac{2\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{5}+5}{8}$, donc

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ et } \tan \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}.$$

De même, on aura $\cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\sin \frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $\tan \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$. Enfin,

$$\text{comme } \frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ et } \tan \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Deuxième partie : calcul de $\cos \frac{\pi}{17}$

1. Si $\sin \frac{h}{2} = 0$, c'est que $\frac{h}{2} \equiv 0[\pi]$, donc $h \equiv 0[2\pi]$. Mais alors on a, pour tout entier k , $\cos(a + kh) = \cos a$ et $\sin(a + kh) = \sin a$, donc $S_n(a, h) = n \sin a$ et $C_n(a, h) = n \cos a$.
2. Je passe par les complexes car c'est quand même plus agréable : $C_n(a, h) + iS_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia} \frac{1 - e^{inh}}{1 - e^{ih}} = e^{ia} \frac{e^{i\frac{nh}{2}} 2i \sin \frac{nh}{2}}{e^{i\frac{h}{2}} 2i \sin \frac{h}{2}} = e^{i(a+(n-1)\frac{h}{2})} \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$. Il ne reste plus qu'à prendre les parties réelle et imaginaire pour obtenir les formules demandées.
3. Parmi les quatre cosinus dont x_1 est la somme, seul le dernier est négatif puisque $\frac{3\pi}{17} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{5\pi}{17} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{7\pi}{17} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\cos \frac{11\pi}{17} = -\cos \frac{6\pi}{17}$ et $\cos \frac{6\pi}{17} < \cos \frac{5\pi}{17}$, donc $\cos(5\theta) + \cos(11\theta) > 0$, et x_1 , obtenu en ajoutant encore deux termes positifs, est bien positif.
4. La somme $x_1 + x_2$ est exactement de la forme $C_n(a, h)$, avec $a = \theta$, $h = 2\theta$ et $n = 8$. D'après la question 2, on a donc $x_1 + x_2 = \frac{\sin(8\theta) \cos(8\theta)}{\sin \theta} = \frac{1 \sin(16\theta)}{2 \sin \theta}$. Mais $16\theta = \frac{16\pi}{17} = \pi - \theta$, donc $\sin(16\theta) = \sin \theta$ et $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$.
5. Il faut y croire :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = & \cos(3\theta) \cos \theta + \cos(3\theta) \cos(9\theta) + \cos(3\theta) \cos(13\theta) + \cos(3\theta) \cos(15\theta) \\ & + \cos(5\theta) \cos \theta + \cos(5\theta) \cos(9\theta) + \cos(5\theta) \cos(13\theta) + \cos(5\theta) \cos(15\theta) \\ & + \cos(7\theta) \cos \theta + \cos(7\theta) \cos(9\theta) + \cos(7\theta) \cos(13\theta) + \cos(7\theta) \cos(15\theta) \\ & + \cos(11\theta) \cos \theta + \cos(11\theta) \cos(9\theta) + \cos(11\theta) \cos(13\theta) + \cos(11\theta) \cos(15\theta) \end{aligned}$$

On utilise les formules de transformation produit/somme et on obtient $x_1 x_2$, comme sommes des cosinus des 32 angles suivants (on peut oublier les signes puisque le cos est pair) : $4\theta, 2\theta, 12\theta, 6\theta, 16\theta, 10\theta, 18\theta, 12\theta, 6\theta, 4\theta, 14\theta, 4\theta, 18\theta, 8\theta, 20\theta, 10\theta, 8\theta, 6\theta, 16\theta, 2\theta, 20\theta, 6\theta, 22\theta, 8\theta, 12\theta, 10\theta, 20\theta, 2\theta, 24\theta, 2\theta, 26\theta$ et 4θ . Or, $26\theta \equiv -8\theta[2\pi]$, donc $\cos(26\theta) = \cos(8\theta)$. De même, $\cos(24\theta) = \cos(10\theta)$, $\cos(22\theta) = \cos(12\theta)$, $\cos(20\theta) = \cos(14\theta)$ et $\cos(18\theta) = \cos(16\theta)$. En regroupant tout ceci, on obtient $x_1 x_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(14\theta) + \cos(16\theta))$. La parenthèse vaut $C_8(2\theta, 2\theta) = \frac{\sin(8\theta) \cos(9\theta)}{\sin \theta}$, avec $\cos(9\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - 8\theta) = -\cos(8\theta)$, d'où $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.

6. On connaît la somme et le produit de x_1 et x_2 , ils sont solution de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$, de discriminant $1 + 16 = 17$. Comme on l'a vu plus haut, $x_1 > 0$, donc on a $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$.
7. Allons-y : $y_1 y_2 = \cos(3\theta) \cos(7\theta) + \cos(3\theta) \cos(11\theta) + \cos(5\theta) \cos(7\theta) + \cos(5\theta) \cos(11\theta) = \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) + \cos(8\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta)) = \frac{1}{4} x_1 x_2 = -\frac{1}{4}$.
De même, $y_3 y_4 = \cos \theta \cos(9\theta) + \cos \theta \cos(15\theta) + \cos(13\theta) \cos(9\theta) + \cos(13\theta) \cos(15\theta) = \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)) = -\frac{1}{4}$ (après simplifications similaires à celles faites pour $x_1 x_2$).
8. y_1 et y_2 ayant pour somme x_1 et produit $-\frac{1}{4}$, ils sont solutions de l'équation $x^2 - x_1 x - \frac{1}{4} = 0$, donc le discriminant vaut $x_1^2 + 1 = \frac{1}{2}x_1 + 2 = \frac{17 + \sqrt{17}}{8}$ et les solutions $\frac{1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}$.

La solution positive est égale à y_1 , car y_2 est somme de deux cosinus négatifs. De même, on obtient $y_3 = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$ et $y_4 = \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$.

9. De plus en plus facile : $\cos \theta \cos(13\theta) = \frac{1}{2}(\cos(14\theta) + \cos(12\theta)) = \frac{1}{2}(-\cos(5\theta) - \cos(3\theta)) = -\frac{y_1}{2}$.
 Comme de plus $\cos \theta + \cos(13\theta) = y_3$, les réels $\cos \theta$ et $\cos(13\theta)$ sont solutions de l'équation $x^2 - y_3x - \frac{y_1}{2}$, $\cos \theta$ étant la solution positive. Le discriminant de l'équation vaut $y_3^2 + 2y_1 = \frac{1 + 17 + 34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{578 - 34\sqrt{17}}}{64} + \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} = \frac{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{578 - 34\sqrt{17}}}{64}$ et on a ensuite $\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{578 - 34\sqrt{17}}}}{16}$

Étonnant, non ?