Devoir Maison n°1

PCSI 1 Lycée Pasteur

À rendre pour le lundi 17 septembre

Le but de ce premier DM d'échauffement (j'exagère à peine, au moins la première partie est tout à fait abordable par un élève de Terminale) est de calculer les valeurs exactes de quelques cosinus. La première partie est archi classique, à tel point que ça ne peut pas faire de mal de connaitre la méthode et le résultat. Pour la deuxième, c'est un peu plus compliqué mais la méhode est en fait ressemblante.

Première partie : calcul de $\cos\dfrac{\pi}{5}$

1. Rappeler (sous forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$.
2. Factoriser (E) sous la forme $(z-1)Q(z) = 0$, où Q est un polynome de degré 4.
3. Déterminer les racines de Q (un changement de variable pourrait s'avérer utile).
4. En déduire les valeurs exactes des nombres suivants : $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\sin\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ (vous pouvez même ajouter les tangentes si ça vous amuse).

Deuxième partie : calcul de $\cos\dfrac{\pi}{17}$

Pour tous réels a et h, et pour tout entier n, on pose $C_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh)$ et $S_n(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)$. On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

1. Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin\dfrac{h}{2} = 0$.
2. Dans le cas contraire, prouver que $C_n(a,h) = \dfrac{\sin\dfrac{nh}{2}\cos\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$ et $S_n(a,h) = \dfrac{\sin\dfrac{nh}{2}\sin\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$.
3. On pose $x_1 = \cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos\theta+\cos(9\theta)+\cos(13\theta)+\cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.
4. Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).
5. Calculer le produit $x_1 x_2$ (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).
6. En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2.

7. On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos\theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.
8. En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4.
9. Calculer le produit $\cos\theta\cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos\theta$ (pour les plus ~~masochistes~~ courageux, finir les calculs et donner cette valeur).

Quelques compléments pour votre culture

Les calculs effectués dans ce devoir à la maison n'ont rien d'anodin et sont même étroitement liés à un des grands problèmes qui ont tenu en haleine les mathématiciens pendant quelques siècles : la construction de figure à la règle et au compas, et ici plus particulièrement la construction de polygones réguliers à la règle et au compas. On peu en fait montrer (mais c'est un peu trop pointu pour vous pour l'instant) que le polygone régulier à n côtés peut être construit à la règle et au compas si et seulement si le nombre $\cos\frac{\pi}{n}$ peut s'eprimer à partir de nombres rationnels en utilisant seulement les opérations élémentaires et l'extraction de racines carrées. Nous venons donc de prouver que les polygones à 5 et à 17 côtés sont constructibles à la règle et au compas. En fait, à part ceux-ci, seuls les polygones à 2, 3, 257 et 65537, et tous ceux dont le nombre de côtés est le produit d'un de ceux-ci par une puissance de 2, sont constructibles à la règle et au compas. Une construction très élégante du polygone à 17 côtés est due à Gauss.