Suites de Davenport-Schinzel et compression de chemins sur les arbres

Guillaume Lafon Gaëtan Leurent

28 mai 2004

Table des matières

Introduction

Le but de ce texte est de présenter rapidement les suites de Davenport-Schinzel, et plus particulièrement leur application à l'étude de la complexité d'algorithmes de compression de chemins sur les arbres. Dans cette optique, nous ne nous étendrons pas trop longuement sur les multiples interprétations et applications géométriques des suites de Davenport-Schinzel, mais nous nous contenterons d'énoncer et prouver le résultat principal dont nous aurons besoin les concernant, à savoir la longueur maximale des suites de Davenport-Schinzel d'ordre 3.

1 Définition et propriétés élémentaires des suites de Davenport-Schinzel

Les suites de Davenport-Schinzel sont un outil fréquemment utilisé en géométrie algorithmique, du fait de leur apparition naturelle dans de nombreux problèmes de nature géométrique. Elles ont été introduites vers la fin des années 60 et abondamment étudiées dans la décennie qui a suivi. Nous allons commencer par les décrire abstraitement avant de les relier au problème qui nous intéresse.

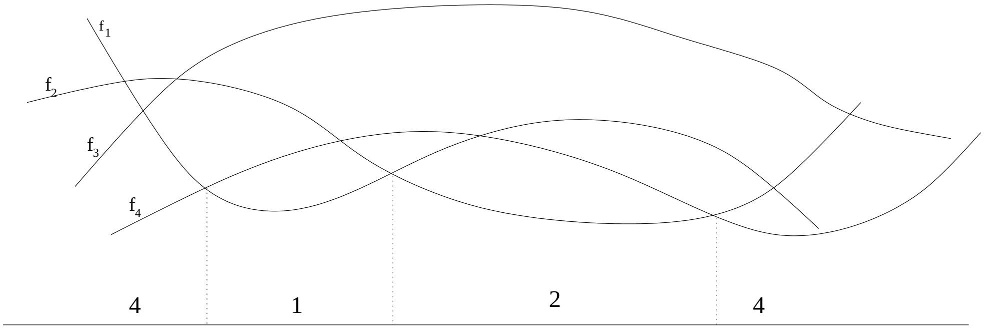
Définition 1. Une suite de Davenport-Schinzel d'*ordre* s sur n symboles est une suite finie $U = u_1, \ldots, u_m$ où $u_1, \ldots, u_m$ sont des éléments pris dans un alphabet à n symboles (on se contente généralement de prendre pour alphabet les entiers compris entre 1 et n), vérifient les deux conditions suivantes :

1. $\forall i \in \{1, \ldots, m-1\},\ u_i \neq u_{i+1}$
2. On ne peut pas extraire de U une sous-suite de $s+2$ éléments $u_{i_1}, \ldots, u_{i_{s+2}}$ tels que $U_1 = u_3 = u_5 = \ldots$ et $u_2 = u_4 = u_6 = \ldots \neq u_1$ (c'est-à-dire que deux symboles distincts de l'alphabet ne peuvent pas apparaitre alternativement trop souvent).

Définition 2. La *longueur* de la suite U est simplement l'entier m, c'est-à-dire le nombre total d'éléments de la suite.

Avant de nous intéresser plus précisément à la longueur des suites de Davenport-Schinzel, nous allons en donner une interprétation géométrique, pour indiquer le genre de problèmes où elles peuvent intervenir (voir le livre de Sharir et Agarwal sur le sujet pour beaucoup plus d'exemples) :

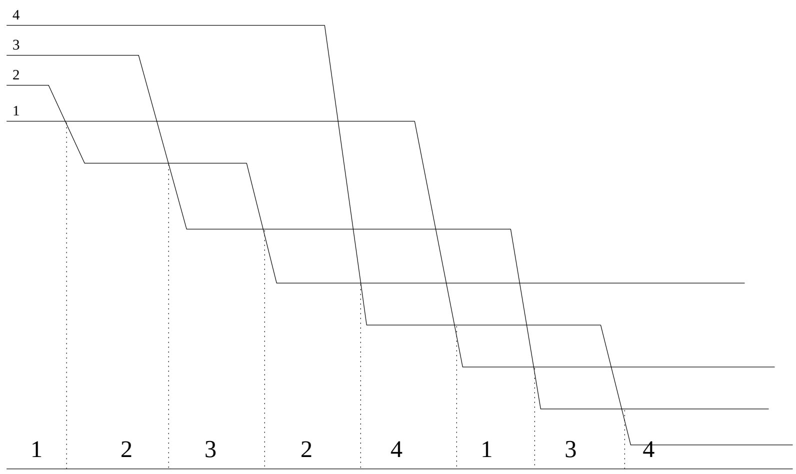
Définition 3. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions continues d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$ s'intersectant mutuellement en au plus s points. Notons $f(x) = \inf(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ et partitionnons I en un ensemble minimal d'intervalles disjoints $I_1, \ldots, I_k$ tels que, pour chaque sous-intervalle I_j, il existe un indice $i_j \in \{a, \ldots, n\}$ tel que $f(x) = f_{i_j}(x)$ sur I_j (c'est-à-dire qu'on change d'intervalle quand un point d'intersection apparait sur l'enveloppe inférieure du graphe, cf le dessin pour un exemple éclairant). On peut construire à partir des intervalles I_j (supposés rangés par ordre croissant) une suite d'entiers $U(f_1, \ldots, f_n) = (i_1, \ldots, i_k)$ de longueur k.



Proposition 1. *La suite $U(f_1, \ldots, f_n)$ ainsi construite est une suite de Davenport-Schinzel d'ordre s. Réciproquement, toute suite de Davenport-Schinzel d'ordre s sur n symboles peut s'écrire comme $U(f_1, \ldots, f_n)$ pour des fonctions f_i qu'on peut choisir affines par morceaux.*

Démonstration. Le fait que $U(f_1, \ldots, f_n)$ est une suite de Davenport-Schinzel d'ordre s ne présente guère de difficultés : on ne peut avoir deux fois de suite le même entier à cause de la minimalité imposée pour la partition de I en sous-intervalles, et si on avait une alternance $\ldots i_1 \ldots i_2 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots$ de longueur $s+2$, une application répétée du théorème des valeurs inetrmédiaires nous donnerait $s+1$ points d'intersection entre f_{i_1} et f_{i_2}, ce qui contredit notre hypothèse sur les fonctions f_i.

Pour la réciproque, un petit dessin vaut mieux qu'une explication complexe, voici un exemple de construction pour $n = 4$ et $s = 3$ qui se généralise sans problème (on renomme les symboles apparaissant dans la suite de façon à ce que 1 apparaisse en premier, puis 2, etc ; on trace n horizontales, celle correspondant à 1 étant la plus basse, et on fait descendre la i-ème horizontale en-dessous de toutes les autres quand le symbole i apparait dans la suite) :



Il suffit de vérifier que les fonction ainsi construites ne peuvent pas s'intersecter plus de s fois. Supposons donc que f_{i_1} et f_{i_2} (avec $i_1 < i_2$) s'intersectent $s+1$ fois. Le points d'in-etersection ne peuvent apparaître que sur des intervalles où l'une des deux fonctions n'est pas constante, ce qui précède immédiatement l'apparition d'un i_1 ou d'un i_2 dans la suite associée. De plus, comme $f_{i_1} < f_{i_2}$ à l'origine, la première fois que cela se produit, c'est un i_2 qui va apparaître, ce qui signifie qu'on construit à partir des $s+1$ points d'intersection une alternance $\ldots i_2 \ldots i_1 \ldots i_2 \ldots$ de longueur $s+1$. Or, la première apparition de i_1 dans la suite précède par construction celle de i_2, ce qui signifie qu'on peut ajouter un i_1 à gauche de notre alternance pour obtenir une alternance absurde de longueur $s+2$. Nos fonctions ne peuvent dons pas s'intersecter plus de s fois, et la construction est valide. □

Remarque 1. On déduit facilement de cette représentation géométrique qu'une suite de Davenport-Schinzel d'ordre s sur n symboles est de longueur au plus $\frac{sn(n-1)}{2}+1$ (nombre total d'intersections entre les fonctions plus 1). L'une des questions principales concernant les suites de Davenport-Schinzel est d'obtenir une borne plus fine, voire un équivalent, ce à quoi nous allons désormais nous intéresser.

2 Longueur maximale des suites de Davenport-Schinzel

Le but de cette section est de démontrer le théorème principal dont nous aurons besoin pour notre application, à savoir une borne sur la longueur maximale des suites de Davenport-Schinzel d'ordre 3. Dans tout le reste du texte, on ne s'intéressera plus qu'à des suites d'ordre au plus 3. Commençons par régler les cas triviaux de l'ordre 1 et de l'ordre 2 :

Théorème 1. *Une suite de Davenport-Schinzel d'ordre* 1 *sur* n *symboles est de longueur au plus* n. *Une suite de Davenport-Schinzel d'ordre* 2 *sur* n *symboles est de longueur au plus* $2n-1$.

Démonstration. Le cas de l'ordre 1 est simple, un même symbole ne peut pas apparaître deux fois dans la suite : il ne peut apparaître deux fois de suite, et si on insère un autre symbole entre deux de ses apparitions, on obtient une alternance interdite de longueur 3. La borne est évidemment atteinte pour la suite $U = (1, \ldots, n)$.

Pour l'ordre 2, on procède par récurrence : si $n = 1$, la longueur maximale est évidemment 1. Supposons le résultat établi pour $n-1$ et soit U une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 2 sur n symboles. Notons a le symbole dont la première occurence dans U est la plus tardive (on peut supposer $a = n$ quitte à renuméroter les symboles) ; a n'apparait en fait qu'une fois dans U. En effet, s'il apparaissait deux fois, il y aurait un au moins un autre symbole b entre ses deux occurences, et b devrait également apparaître à gauche de la première apparition de a, par définition de a, ce qui créerait une alternance interdite de longueur 4 entre a et b. Supprimons l'unique occurence de a et, dans le cas où les deux symboles l'encadrant seraient les mêmes, un de ces symboles. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 2 sur $n-1$ symboles, qui est par hypothèse de récurrence de longueur au plus $2n-3$. Comme on a supprimé au plus deux symboles de U pour l'obtenir, c'est que U était de longueur au plus $2n-1$, ce qui prouve le théorème. Encore une fois, la borne est atteinte pour $U = (1, 2, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 1)$. □

On va maintenant s'intéresser au cas de l'ordre 3 qui est beaucoup plus technique. Commençons par rappeler la définition de la fonction α, qui intervient dans la borne que nous allons démontrer. Nous utiliserons par la suite des propriétés de la fonction d'Ackermann sans les rappeler, une fois de plus, le livre de Sharir et Agarwal est plus complet que cet exposé.

Définition 4. Les fonctions A_k ($k \in \mathbb{N}^*$) et A d'Ackermann sont définies récursivement sur les entiers de la façon suivante :

$$A_1(n) = 2n$$
$$A_k(n) = A_{k-1}(A_k(n-1))$$
$$A(n) = A_n(n)$$

Définition 5. La fonction α est l'inverse fonctionnel de la fonction A d'Ackermann, c'est-à-dire :

$$\alpha(n) = \min\{p \geq 1 \mid A(p) \geq n\}.$$

On définit de même α_k comme l'inverse fonctionnel de A_k.

La fonction α est donc une fonction qui croît extrêmement lentement, à tel point qu'on a pour toutes les application concrètes $\alpha(n) \leq 4$. On peut maintenant énoncer le théorème principal :

Théorème 2. *La longueur maximale d'une suite de Davenport-Schinzel d'ordre* 3 *est un* $O(n\alpha(n))$ *(on a en fait une borne supérieure* et *une borne inférieure en* $n\alpha(n)$*).*

Nous allons montrer séparément les deux bornes, en commençant par la borne inférieure, qui utilise des techniques proches de ce qui a été fait dans le cas des suites d'ordre 2, mais avec une récurrence beaucoup plus difficile à effectuer. On va commencer par quelques définitions techniques :

Définition 6. Soit $U = (u_1, \dots, u_k)$ une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 3 sur n symboles (on prendra ici pour symboles les entiers de 1 à n, on supposera de plus que la première apparition du symbole i précède celle de i' dès lors que $i < i'$). Pour chaque symbole i, on pose $\mu_i = \min\{j \mid u_j = i\}$ et $\nu_i = \max\{j \mid u_j = i\}$ (indices de première et dernière apparition de i).

Définition 7. Un *bloc* de U est une sous-suite maximale décroissante d'éléments contigus de U. Une *chaîne* de U est une sous-suite de U composée d'éléments contigus deux à deux distincts (en particulier, un bloc est une chaîne).

Proposition 2. *U est composée d'au plus $2n-1$ blocs distincts.*

Démonstration. Ce résultat découle du fait que le dernier indice d'un bloc est un ν_i ou le suivant un μ_i (et que la première apparition du symbole 1 qui commence la suite ne peut pas être à l'indice suivant le dernier incide d'un bloc...). En effet, soit j le dernier indice du bloc, on a $u_j < u_{j+1}$. Dans l'hypothèse où $j \neq \nu_{u_j}$ et $j+1 \neq \mu_{u_{j+1}}$, on va pouvoir construire une alternance de longueur 4 entre u_j et u_{j+1}, qu'on peut compléter à gauche par une occurence de u_j puisque celui-ci doit faire sa première apparition avant u_{j+1} :

$$\dots u_j \dots u_{j+1} \dots u_j < u_{j+1} \dots u_j \dots$$

On obtiendrait une alternance interdite de longueur 5, d'où la proposition. $\square$

Définition 8. On notera désormais $l(k,n)$ la longueur maximale d'une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 3 composée de k chaînes. Par la proposition précédente, il nous suffit maintenant de borner $l(2n-1,n)$ pour obtenir la première partie du théorème.

Proposition 3. *On a, pour tous entiers $k, n \geq 1$, $l(k,n) \leq 32k\alpha(k) + (4\alpha(k)+2)n$.*

Démonstration. On va passer par l'intermédiaire d'un lemme, qui sert à établir la formule de récurrence et est donc fondamental :

Lemme 1. Soit $k, n \geq 1$ et d un diviseur de k alors on peut trouver des entiers $p, n_1, \dots, n_d$ tels que $p + \sum_{i=1}^{d} n_i = n$ et

$$l(k,n) \leq l(d,p) + 4k + 4n + \sum_{i=1}^{d} l(\frac{k}{d}, n_i).$$

Démonstration. Le principe est relativement simple : la suite initiale U étant composée de k chaînes, on va la découper tronçons de $\frac{k}{d}$ chaînes et supprimer les symboles “en trop” dans chaque tronçon, à la manière de ce qu'on avait fait pour le cas de l'ordre 2 (la récurrence se fait donc principalement sur le nombre de chaînes de la suite).

Notons donc $c_1, \dots, c_k$ les chaînes constituant U, on va définir $L_1, \dots, L_i, \dots, L_d$ comme les sous-suites formées des chaînes $c_{(i-1)\frac{k}{d}+1}, \dots, c_{i\frac{k}{d}}$:

$$(\overbrace{\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_i}_{c_1}, \underbrace{\dots}_{c_2}, \dots, \underbrace{\dots}_{c_{\frac{k}{d}}}}^{L_i}, \dots, \underbrace{\dots}_{c_k})$$

On appellera désormais symbole *interne* à L_i donc toutes les occurences ont lieu dans la sous-suite L_i et symbole *externe* un symbole qui n'est interne à aucune sous-suite. On note p le nombre de symboles externes, et n_i le nombre de symboles internes à L_i. Maintenant, considérons L_i et supprimons-y tous les symboles externes, ainsi que les symboles qui apparaissent deux fois côte à côte suite à ces suppressions (dans ce cas, on ne supprime qu'une occurence du symbole, pas les deux !), ce qu'on peut visualiser ainsi (les i étant des symboles internes, et les e des externes) :

$$\dots i_1 \cancel{e_1} i_2 \dots i_3 \cancel{e_2} \cancel{i_3} \dots$$

On se retrouve avec une sous-suite de L_i qui est assez clairement une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 3 sur n_i symboles. Comme on a supprimé au plus $\frac{k}{d} - 1$ symboles internes pour chaque L_i (en effet, une suppression provient de la juxtaposition de deux symboles qui appartenaient à l'origine à deux chaînes disctinctes de U), le nombre total de symboles internes est :

$$k - d + \sum_{i=1}^{d} l(\frac{k}{d}, n_i).$$

Il reste à évaluer la contribution des termes externes, on va pour cela considérer deux nouveaux cas. Un symbole externe est dit *intérieur* dans L_i s'il n'y fait ni sa première, ni sa dernière apparition. Pour évaluer le nombre de symboles externes intérieur, on supprime dans L_i tous les symboles qui ne le sont pas et, comme précédemment, les répétitions qui sont apparues lors de ce processus. La suite obtenue est en fait composée de symboles qui apparaissent exactement une fois chacun. En effet, sinon on aurait une alternance de longueur 3 entre symboles externes intérieurs qui pourrait se prolonger en une alternance de longueur 5 car le symbole du milieu est supposé intérieur, donc apparait à gauche et à droite de L_i :

$$\dots\ b\ \dots\ \overbrace{a\ \dots\ b\ \dots\ a}^{L_i}\ \dots\ b\ \dots$$

De plus, si on concatène toutes ce suistes, et quitte à enlever les répétitions, ce qui supprime au maximum d symboles, on obtient une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 3 sur p symboles et constituée d'au plus d chaînes. On a donc une contribution des termes externes intérieurs de

$$d(\frac{k}{d} - 1) + (l(d,p) - d) = k + l(d,p).$$

Enfin, supprimons dans $L - i$ tous les symboles qui ne sont pas externes et qui ne font pas leur première apparition dans L_i (en supprimant aussi les répétitions apparues). Il nous reste une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 2 par un raisonnement similaire au précédent (la seule différence est qu'on peut rajouter un b à droite mais pas à gauche, d'où l'ordre 2 au lieu de 3). Un nouveau calcul élémentaire nous donne une contribution pour ces termes valant au plus $k - 2d + 2p$.

Il ne reste plus qu'à additionner ces trois contributions (en comptant deux fois la dernière car on ne s'est préocuppé que des symboles faisant leur première apparition dans L_i, ceux qui y font leur dernière apparition ont bien sûr la même contribution) et on obtient l'inégalité voulue :

$$\begin{array}{rcl} l(k,n) & \leq & k - d + \sum_{i=1}^{d} l(\frac{k}{d}, n_i) + k + l(d,p) + 2(k - 2d + 2p) \\ & \leq & 4k + 4p + l(d,p) + \sum_{i=1}^{d} l(\frac{k}{d}, n_i). \end{array}$$

□

On va désormais déduire de cette formule de récurrence la borne sur $l(k,n)$.

La preuve est essentiellement technique. Commençons par montrer, par récurrence sur q et s, que, si $n, s \geq 1$, $q \geq 2$ et k divise $A_q(s)$, alors $l(k,n) \leq (4q-4)ks + (4q-2)n$.

Dans le cas où $q = 2$ (on a alors $A_q(s) = A_2(s) = 2^s$), pour $k = 2^s$ et en prenant $b = 2$ dans la relation obtenue au lemme précédent, on obtient $l(k,n) \leq 4k + 6p + l(\frac{k}{2}, n_1) + l(\frac{k}{2}, n_2)$ (on a en effet $l(2,n) = 2n$). On en déduit facilement $l(k,n) \leq 4ks + 6n$, d'où le résultat pour $q = 2$.

Supposons maintenant le résultat montré pour les $q' < q$ et pour $s' < s$ quand $q' = q$. On suppose $k = A_q(s)$ et on prend $d = \frac{k}{A_q(s-1)}$. On a par hypothèse de récurrence $l(d,p) \leq (4q-8)k + (4q-6)p$, ce qui, introduit dans la relation du lemme precédant, donne :

$$\begin{array}{rcl} l(k,n) & \leq & (4q-4)k + (4q-2)p + \sum_{i=1}^{d}((4q-4)\frac{k}{d}(s-1) + (4q-2)n_i) \\ & = & (4q-4)ks + (4q-2)(p + \sum_{i=1}^{d} n_i) \\ & = & (4q-4)ks + (4q-2)n \end{array}$$

Dans le cas où k n'est pas égal à $A_q(s)$, mais le divise seulement, il suffit d'utiliser que $l(rk, rn) \geq rl(k,n)$ (en effet, si on prend une suite de Davenport-Schinzel de longueur k sur n symboles et qu'on la recopie r fois en changeant à chaque fois le nom des symboles, on en obtient une nouvelle de longueur rk sur rn symboles).

Une fois ce résultat obtenu, on généralise au cas où k est quelconque et on obtient aisément $l(k,n) \leq (8q-8)ks + (4q-2)n$ pour k quelconque. Il suffit ensuite de poser $s = \alpha_q(k)$ puis $q = \alpha(k) + 1$ pour terminer la démonstration de la proposition (on a alors $\alpha_q(k) \leq 4$. □

Corollaire 1. Si U est une suite de Davenport-Schinzel d'ordre 3 sur n symboles, sa longueur est majorée par $(68n - 32)\alpha(n) + (70n - 32) = O(n\alpha(n))$.

Démonstration. C'est immédiat en prenant $k = 2n - 1$ dans la proposition précédente et en utilisant le fait que $\alpha(2n-1) \leq \alpha(n) + 1$. □

On va maintenant s'attaquer au problème de la borne inférieure, qui n'est hélas pas plus simple à résoudre. Pour éviter d'alourdir l'exposé avec une nouvelle démonstration très technique, on se contentera de donner la construction des suites permettant d'atteindre la borne inférieure, et on laissera de côté une partie des calculs permettant de prouver la validité de la construction. Pour les besoins de la construction, on va introduire de nouvelles fonctions, qui croissent en fait à la même vitesse que des fonctions d'Ackermann :

Définition 9. Les fonctions C_k sont définies récursivement sur les entiers comme suit :

$$C_1(n) = 1$$

$$C_k(1) = 2C_{k-1}(2)$$

$$C_k(n) = C_k(n-1)C_{k-1}(C_k(n-1))$$

On a, pour $k \geq$, $A_{k-1}(n) \leq C_k(n) \leq A_k(n+3)$.

Définition 10. On pose $\bar{a} = C_k(n-1)$, $\bar{b} = C_{k-1}(\bar{a})$ et $\bar{c} = \bar{a}\bar{b} = C_k(m)$.

On va désormais définir, pour $k, m \geq 1$, des suites $S_{k,m}$ qui vont être composées de $mC_k(m)$ symboles (que l'on prendra dans l'ensemble des couples (d, c), pour d entier inférieur ou égal à m et c entier inférieur ou égal à $\bar{c}$. On veut que la suite $S_{k,m}$ contienne $C_k(m)$ *drapeaux*, où les drapeaux sont des sous-suites de symboles adjacents de la forme $((1, c), (2, c), \ldots, (m, c))$, pour un certain c inférieur à $\bar{c}$ (ces drapeaux sont donc disjoints, et chaque symbole apparait exactement dans un drapeau).

On construit de telles suites par double récurrence sur k et m :

- si $k = 1$, on prend simplement $S_{1,m} = ((1, 1), (2, 1), \ldots, (m, 1))$.
- si $k = 2$, on prend $S_{2,m} = ((1, 1), (2, 1), \ldots, (m-1, 1), (m, 1), (m-1, 1), \ldots, (1, 1), (2, 1), (2, 2), \ldots, (m-1, 2), (m, 2), \ldots, (1, 2))$.
- dans le cas général, on créée $\bar{b}$ copies de $S_{k,m-1}$ en renommant les symboles comme des triplets (d, a, b) (avec $d \geq m-1$) pour avoir des symboles différents dans chaque copie. On nommera ces copies $S'_1, \ldots, S'_{\bar{b}}$.
  Indépendemment, on crée une suite $S^* = S_{k-1}, \bar{a}$, qui utilise des symboles différents de ceux déjà pris pour les S'_i. On peut numéroter les symboles de S^* par des triplets (m, a, b) (il y a $\bar{a}\bar{b}$ symboles). Pour chaque tel symbole (m, a, b), on l'insère dans le a-ème drapeau de S'_b, et on ajoute une seconde occurence de $(m-1, a, b)$ juste après. On réinsère ensuite le S'_b ainsi modifié à la place du b-ème drapeau de S^* et on ajoute à la fin de ce nouveau drapeau un symbole $(m, \bar{a}, b)$.

Essayons d'expliciter la construction visuellement. On a à l'origine la b-ème copie S'_b, qui contient $\bar{a}$ drapeaux de longueur $m-1$ chacun :

$$S'_b : \quad \ldots (1, 1, b), (2, 1, b), \ldots, (m-1, 1, b), \ldots, dr_2, \ldots, dr_3, \ldots, dr_{\bar{a}}, \ldots$$

(on a détaillé le drapeau 1, dr_2 désigne le drapeau 2, et ainsi de suite ; il peut bien sûr y avoir a priori des éléments à gauche du drapeau 1, et entre les drapeaux). On perturbe cette harmonie en introduisant les éléments de S^* de la façon suivante (on verra ici l'introduction du premier, il se passe la même chose dans les autres drapeaux) :

$$S'_b : \quad \ldots (1, 1, b), (2, 1, b), \ldots, (m-1, 1, b), \mathit{(m,1,b)}, (m-1, 1, b), \ldots, dr_2, \ldots, dr_3, \ldots, dr_{\bar{a}}, \ldots$$

(l'élément en italique est celui ajouté, et on a dupliqué son prédécesseur).

Visualisons maintenant S^*, qui a l'origine a $\bar{b}$ drapeaux de longueur $\bar{a}$:

$$S^* : \quad \ldots (m, 1, 1), (m, 2, 1), \ldots, (m, a, 1), \ldots, dr_2, \ldots, dr_3, \ldots, dr_{\bar{b}}, \ldots$$

La dernière étape consiste à remplacer brutalement ses drapeaux par les S'_b modifiés précédemment construits :

$$S^* : \quad \ldots S'_1, (m, a, 1), \ldots, S'_2, (m, a, 2), \ldots, S'_{\bar{b}}, (m, a, b), \ldots$$

Remarquons tout de suite que les suites ainsi construites sont de très bons candidats pour être des suites de Davenport-Schinzel de longueur maximale, puisque, pendant la construction, on ajoute des alternances de symboles de longueur 4 dès que possible, tout en évitant les alternances de longueur 5.

Venons-en aux propriétés de ces suites :

Proposition 4. *La suite $S_{k,m}$ ainsi construite est une suite de Davenport-Schinzel d'ordre* 3 *sur $mC_k(m)$ symboles.*

Démonstration. Le fait qu'il y ait le bon nombre de symboles est clair au vu de la construction. Le fait qu'il s'agisse d'une suite de Davenport-Schinzel est laissé en exercice au lecteur, ce n'est pas bien difficile quand on a bien compris la construction (essentiellement, comme on prend des ensembles de symboles disjoints pour les différents éléments de la construction, l'apparition d'alternances de longueur 5 ne pourrait se faire que lorsqu'on duplique un symbole, et il est facile de voir que ce n'est pas le cas si l'on est parti d'une suite qui était de Davenport-Schinzel. □

Proposition 5. *La longueur $l'(k,m)$ de la suite $S_{k,m}$ vérifie l'inégalité $l'(k,m) > (km - 2)C_k(m) + 1$.*

Démonstration. De la construction des suites, on déduit

$$l'(k,m) = \bar{b}l'(k,m-1) + l'(k-1,\bar{a}) + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}$$

(le terme $\bar{a}\bar{b}$ aux insertons d'éléments de S^* dans les S'_b, et le terme $\bar{a}$ aux duplications dans S^*).

Il "suffit" ensuite de faire une récurrence assez pénible que nous épargnerons au lecteur. □

Corollaire 2. La longueur maximale des suites de Davenport-Schinzel d'ordre 3 sur n symboles est minorée par $\frac{1}{2}n(\alpha(n) - 4) = O(n\alpha(n))$.

Démonstration. À k fixé, prenons $m_k = C_{k+1}(k-3)$ et posons $n_k = m_k C_k(m_k)$. La longueur maximale $L(n_k)$ des suites sur n_k symboles est minorée par $(k-2)n_k$ du fait de la proposition précédente. Maintenant, pour un n quelconque compris entre n_{k-1} et n_k vérifie $L(n) \geq fracnn_{k-1}n_{k-1}(k-3) \geq \frac{1}{2}n(\alpha(n) - 4)$ en utilisant que $\alpha(n) \leq k+1$. □

3 Compression de chemins sur les arbres

Nous allons maintenant exposer le problème qui est la motivation de cet article, à savoir le nombre maximal de compressions dans un arbre. Suivant Shamir et Agarwal, nous prendrons la représentstion suivante des arbres :

Définition 11. Un *arbre* est un triplet (V, r, ϕ), où V est un ensemble fini de sommet, r un sommet particulier (la *racine* de l'arbre) et $\phi : V \backslash \{r\} \to V$ la relation de parenté ($\phi(v)$ est le père de v) qui est une application sans cycle.

Définition 12. Un *postordre* sur un arbre T est un ordre sur V obtenu en concaténant des postordres issus sur les sous-arbres issus de la racine, et en ajoutant la racine comme plus grand élément (un tel ordre n'est bien sûr pas unique, il dépend à chaque étape de l'ordre dans lequel on choisit les fils).

Nous allons maintenant définir la notation de compression qui nous intéresse :

Définition 13. Une *compression de chemin généralisée* (ou GPC) $f = (v_1, \ldots, v_k)$, où, pour tout i, v_i est supposé être un descendant direct de v_{i+1} (c'est-à-dire qu'il existe un entier j tel que $\phi^j(v_i) = v_{i+1}$), est une modification de l'arbre consistant à poser $\phi(v_i) = v_k$ pour $i < k$ (le reste de l'arbre étant inchangé. On notera $s(f)$ le premier sommet v_1 de f.

Définition 14. Une suite $F = f_1, \ldots, f_n$ de GPC sur un arbre T sera dite *admissible* si chaque f_{i+1} est une GPC sur l'arbre T_i obtenu après les i premières GPC. Elle sera dite *ordonnée* s'il existe un postordre sur T pour lequel $s(f_1), \ldots, s(f_n)$ est une suite croissante.

Définition 15. La *longueur* de la suite F est $|F| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$.

La question que nous nous posons est celle de la longueur maximale $L'(m,n)$ d'une suite exécutable ordonnée de n GPC sur un arbre à m sommets. Le résultat est en fait, assez étrangement, lié aux suites de Davenport-Schinzel :

Théorème 3. *On a l'inégalité suivante :* $L'(m,n) \leq L(n) + m + 1$.

Autrement dit, $L'(m,n)$ est au plus en $O(n\alpha(n))$. Pour démontrer ce résultat, on va tout simplement établir une correspondance entre suites de GPC et suites de Davenport-Schinzel. Pour cela, on va légèrement modifier la définition des GPC : pour chaque GPC $(v_1, \ldots, v_k)$, on ajoute un sommet v_0 de père v_1, et on le place le plus loin possible dans le postordre de T (on appellera un tel arbre augmenté (m,n)-arbre). On obtient ainsi un arbre T à $m+n$ sommets.

La première étape de la correpondance consiste à fabriquer une suite de GPC à partir d'une suite de Davenport-Schinzel.

Définition 16. Soit $U = (u_1, \ldots, u_n)$ une suite de Davenport-Schinzel, et $c_1, \ldots, c_p$ ($p \leq 2n-1$) les blocs qui la composent. On construit un (p,n)-arbre comme suit : p noeuds correspondant aux p blocs (de façon que le noeud correspondant à p a pour père celui correspondant à $p+1$) et n feuilles, une par symbole de U, rattachées à l'indice correpondant au bloc où s'effectue la première apparition du symbole en question. On définit $f_i = (l_i, j_1, \ldots)$, où l_i est la feuille associée au i-ème symbole, et $j_1, \ldots$ les noeuds associés aux blocs où ce symbole apparait (dans l'ordre d'apparition). On pose enfin $F = (f_1, \ldots, f_n)$.

Proposition 6. *La suite ainsi obtenue est une exécutable ordonnée.*

Démonstration. Le fait qu'elle soit ordonnée est évident. Supposons qu'elle n'est pas exécutable. Il existe donc un symbole i pour lequel deux blocs successifs le contenant ne sont plus reliés directement dans l'arbre, donc il existe une GPC qui les a séparés précédemment, c'est-à-dire un autre symbole $j < i$ apparaissant dans un bloc compris entre les deux blocs en question. Or, il apparait aussi dans son premier bloc qui précède ceux où apparait i puisque $j < i$, et aussi dans son dernier bloc qui est après les deux blocs posant problème, sinon il n'y aurait pas eu séparation. On en déduit une alternance de longueur 5 entre ces deux symboles, ce qui est absurde. □

Dans l'autre sens, ce n'est guère plus compliqué :

Définition 17. Soit T un (m,n)-arbre ordonné (par les entiers de 1 à $m+n$) et $F = (f_1, \ldots, f_n)$ une suite de GPC. ON note, pour chaque GPC $f_i = (v_1, \ldots, v_k)$, $f_i^0 = (x_1, \ldots, x_{k-1})$ et, pour $j = 1, \ldots, m+n$, $U_j = \{1 \leq p \leq n \mid j \in f_p^0\}$. On pose U la concaténation des U_j. Enfin, on construit V à partir de U en éliminant le premier élément de U_j s'il est égal au précédent.

Proposition 7. *La suite V ainsi obtenue est une suite de Davenport-Schinzel d'ordre* 3 *de longueur au moins égale à* $|F| - (m+n+1)$.

Démonstration. La borne sur la longueur est évidente, puisque qu'on a supprimé au plus $m+n-1$ éléments de u. Pour le fait qu'elle soit de Davenport-Schinzel, supposons au contraire qu'elle contienne une alternance $\ldots i \ldots j \ldots i \ldots j \ldots i \ldots$ dont les éléments appartiennent à des sous-suites U_a, U_b, U_c, U_d, U_e. On peut toujours supposer que c'est la première alternance impossible, que U_a contient la première apparition de i et U_b la première de j. On a alors $a < b$. De plus, on doit avoir $c < d$ sinon i apparaitrait avant j dans U_d, et on n'aurait pas l'alternance interdite. Enfin, b étant une feuille et pas c, $b \neq c$. On voit maintenant que a est un descendant direct de c, donc b aussi. De même, c est un descendant de d, qui en est un de e.

Soit g le plus petit ancêtre commun de a et b, c'est un descendant de c d'après ce qui précède. g ne peut pas être une feuille (a et b en étant), donc est distinct de a et b. Soit enfin h le fils de g sur le chemin de b, on a $a < h$ donc, quand f_i est exécuté, b est toujours descendant de h. Soit t le premier sommet ancêtre de h (il se trouve entre h et c). Après l'exécution de f_i, b est toujours un descendant de t. Soit maintenant r le dernier noeud de f_i, après f_i, h est fils de r. Mais alors d, qui était à l'origine entre h et r, ne peut plus être un descendant de d, donc b non plus ! Donc f_j ne va plus être exécutable, ce qui est absurde. La suite V est donc bien de Davenport-Schinzel. $\square$

Le théorème découle facilement de cette double construction.