Quelques preuves de l'irrationnalité de $\zeta(3)$

Guillaume Lafon et Jérôme Levie

Exposé de maîtrise sous la direction de Stéphane Fischler

18 juillet 2004

Table des matières

Introduction : La mystérieuse fonction ζ

La fonction ζ de Riemann est définie, pour $s \in \mathbb{C} : \Re e(s) > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Par des techniques classiques, on l'étend à une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple en 1. Elle est à l'origine de nombreuses conjectures et autres problèmes, les plus célèbres étant la conjecture de Riemann (les zéros non triviaux de ζ ont tous une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$) et la nature algébrique des valeurs prises par la fonction ζ aux entiers ($\neq 0, 1$) (on conjecture que ces valeurs sont toutes transcendantes). Si le problème est assez facile pour les entiers pairs, il n'est toujours pas complètement résolu dans le cas des entiers impairs $\geqslant 3$. L'irrationalité de $\zeta(3)$ n'a pu être démontrée qu'en 1978 par Roger Apéry [1] (celui-ci n'avait en fait donné qu'un schéma de démonstration, complété ensuite par quelques confrères). Depuis, d'autres démonstrations ont été faites de ce résultat, (cf. la première section de la bibliographie) qui fourniront la matière de cet exposé. Enfin, Tanguy Rivoal [14] a récemment démontré l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ d'une infinité de valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs $\geqslant 3$.

Nous planterons d'abord le cadre théorique nécessaire aux démonstrations ultérieures, puis nous présentons la preuve originale — un peu mystérieuse... — d'Apéry. Ensuite, nous étudierons d'autres démonstrations de l'irrationalité de $\zeta(3)$, en essayant de comprendre leurs liens et ce qui se cache sous des manipulations qui peuvent au premier abord paraître un peu mystérieuses. Enfin, nous terminerons par le résultat de Rivoal et une ouverture vers la théorie de Zeilberger ([22], [23]) et vers les polyzêtas ([24], [29]), thème de recherche actuel.

1 Le contexte général

1.1 Un rappel : le cas de $\zeta(2n)$

Contrairement au cas des entiers impairs, la nature de $\zeta(2n)$ est connue depuis Euler, qui en donna une expression en termes des nombres de Bernoulli. Il existe plusieurs démonstrations de la formule d'Euler ; nous en donnons une basée sur les produits eulériens [32].

Rappelons la définition des nombres de Bernoulli :

Définition 1. Les *nombres de Bernoulli* $B_n(n \in \mathbb{N})$ sont définis par récurrence par :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} B_k = 0$$

avec la condition initiale $B_0 = 1$. On a la caractérisation suivante :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m$$

ou encore, puisque $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_{2n} = 0$ si $n > 0$:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2} z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m}.$$

Proposition 1. *Pour tout entier k, on a*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}.$$

Démonstration. On utilise le produit eulérien :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}),$$

le produit convergeant uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Le théorème des résidus [33], appliqué à $\frac{\cot(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}$ sur le contour $(\pm 1 \pm i)(n + \frac{1}{2})$, permet de montrer successivement :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2z}{n^2 - z^2})$$

puis

$$\begin{array}{rcl} & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m} z^{2m} & = & \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \pi i z \\ = & (\pi z) \cot(\pi z) & = & 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{n^{2m}}. \end{array}$$

La formule suit alors de l'identification des coefficients. □

Vu cette formule, la transcendance des $\zeta(2n), n \in \mathbb{N}^*$ suit de celle de π, démontrée par Lindemann en 1873. La formule analogue pour les entiers négatifs :

$$\zeta(1 - m) = -\frac{B_m}{m},\ m > 1\ ;\ \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

ne permet de conclure que sur la nature arithmétique des $\zeta(n)$, pour $n \leqslant 0$. Pour les $\zeta(2n+1)$, $n \geqslant 1$, il va donc falloir recourir à d'autres techniques, issues de résultats de la théorie des nombres.

1.2 Quelques mots sur les fractions continues

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le développement en fraction continue [9] de α s'obtient par un algorithme du type de celui d'Euclide : on pose $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$, $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$, et :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

On appelle réduites de α les nombres $\pi_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_o, \ldots, a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$, $k \in \mathbb{N}$.

Les convergents p_k et q_k vérifient

$$\begin{cases} p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}, \\ q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}, \end{cases}$$

avec l'initialisation :

$$\begin{cases} p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \\ q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0. \end{cases}$$

Bien sûr, la fraction continue se termine si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$; et celle-ci est périodique si et seulement si α est irrationnel quadratique. (Théorème d'Euler-Lagrange)

On montre que, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Les réduites de α sont les meilleures approximations de α, au sens où, pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$,

$$\left(\exists n \in \mathbb{N} : \frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\forall \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q} : 1 \leqslant q' < q\right) |q'\alpha - p'| \leq |q\alpha - p|\right).$$

On est aussi amené à considérer des fractions continues plus générales

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{\ddots}}}$$

dont les convergents p_k et q_k vérifient : $\begin{cases} p_{k+1} = a_{k+1} p_k + b_k p_{k-1} \\ q_{k+1} = a_{k+1} q_k + b_k q_{k-1} \end{cases}$, avec la même initialisation que précédemment.

1.3 Une petite introduction à la théorie des nombres transcendants

Les techniques habituelles de démonstration d'irrationalité s'appuient sur un constat élémentaire : un réel trop bien approché par des rationnels ne peut être rationnel lui-même. En effet, on a : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists C > 0$ $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}$: $x \neq \frac{p}{q} \Rightarrow |x - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q}$ (prendre, si $x = \frac{p}{q}$, $C = \frac{1}{q}$). Ceci conduit à introduire le concept de mesure d'irrationalité :

Définition 2. On appelle *mesure d'irrationalité* du réel x, notée $\mu(x)$, la borne inférieure des θ tels que l'inégalité suivante ait un nombre fini de solutions (p,q) dans $\mathbb{Z}$:

$$|x - \frac{p}{q}| \leqslant q^{-\theta}.$$

Notons que, si on définit, pour $\beta \in \mathbb{R}$: $\|\beta\| = min(\beta - \lfloor \beta \rfloor, \lceil \beta \rceil - \beta)$, on a l'équivalence :

$$(\mu(\beta) = 2) \iff \liminf_{q \to +\infty} q\|q\alpha\| = 0$$

.

On a clairement [9] $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \mu(x) = 1$ et $\forall x \notin \mathbb{Q}$, $\mu(x) \geqslant 2$ (par l'approximation par les fractions continues). En fait, cette mesure n'est pas très intéressante au sens où elle est presque constante, d'après le puissant théorème suivant :

Théorème 1. *Pour presque tout réel x (au sens de la mesure de Lebesgue), on a $\mu(x) = 2$.*

En particulier, le théorème de Roth [9] affirme que, si ξ est algébrique, $\mu(\xi) = 2$.

1.4 Les approximants de Padé

Les approximations de Padé ([7], [9]) sont des approximations de fonctions holomorphes par des fractions rationnelles, examinées pour la première fois par Hermite et Padé à la fin du 19^{eme} siècle. On considère des séries formelles $f = (f_1, \dots, f_r)$, $f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,k} z^k$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Si $n \in \mathbb{N}^k$, les approximants de Padé de type I sont des $p_i \in \mathbb{C}[X]_{\leqslant n_i - 1}$ tels que : $\sum_{i=1}^{k} p_i(z) f_i(z) = O(C|z|^{|n|})$, où $|n| = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Les approximants de Padé de type II sont des $p_i \in \mathbb{C}[X]_{\leqslant |n| - n_i}$ tels que, $\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant k$, $p_i(z) f_j(z) - p_j(z) f_i(z) = O(C|z|^{|n|+1})$. En regardant ces équations dans les yeux, on voit qu'on peut se contenter de considérer les équations pour $i = 1 < j$. En comptant alors (pour les types I ou II) le nombre de variables et d'équations linéaires indépendantes pour les p_i, on voit que de tels polynômes existent toujours. Signalons qu'on considère parfois des approximants de Padé à l'infini (remplacer z par $\frac{1}{z}$ dans les expressions).

S'il est trivial de montrer l'existence de ces approximants, la difficulté réside dans leur construction explicite. Une fois découvertes, ces expressions explicites permettent bien souvent de démontrer des résultats d'irrationalité ou de transcendance : Sorokin [15] déduit une mesure de transcendance pour π^2 à partir d'approximations de Padé de fonctions arithmétiques, Mahler [13] obtient des mesures de transcendance de valeurs du logarithme à partir des approximants simultanés de $1, \ln(1+x), \dots, (\ln(1+x))^{m_1}$, sans parler des résultats de Nikishin, Beukers et Rivoal cités plus bas. Enfin, ces approximants fournissent une preuve classique du théorème de Lindemann [6] :

Théorème 2. *Si α est algébrique non nul, e^{α} est transcendant.*

2 Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ par la méthode d'Apéry

La démonstration d'Apéry repose en fait sur un principe très simple : partir de la série définissant $\zeta(3)$ et en accélérer la convergence jusqu'à obtenir des approximations rationnelles permettant de conclure à l'irrationalité, le point-clé de la démonstration consistant à calculer les numérateurs et dénominateurs des fractions ainsi obtenues (en fait, on se contente de trouver une relation de récurrence). Pour cela, on procèdera en plusieurs étapes.

2.1 Une première amélioration

Proposition 2. *On a le résultat suivant :*

$$\zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C_{2n}^n}.$$

Démonstration. La preuve de cette formule est un calcul relativement élémentaire, mais c'est un bon exemple des méthodes utilisées pour la démonstration d'Apéry. On introduit [4] les nombres suivants :

$$\varepsilon_{n,k} = \frac{1}{2} \frac{k!^2 (n-k)!}{k^3 (n+k)!},\ k \in \{0, \dots, n\}$$

qui vérifient

$$(-1)^k n(\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k}) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\dots(n^2-k^2)}.$$

En appliquant le développement asymptotique de $\frac{1}{x}$:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{a_1 \dots a_{k-1}}{(x+a_1)\dots(x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 \dots a_K}{x(x+a_1)\dots(x+a_K)}$$

avec $x = n^2$ et $a_k = -k^2$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\dots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - 2\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 C_{2n}^n}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C_{2n}^n} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(\varepsilon_{n,k} - \varepsilon_{n-1,k})$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(-1)^k(\varepsilon_{N,k} - \varepsilon_{k,k}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{2k^3 C_{N+k}^k C_N^k} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C_{2n}^n}.$$

En remarquant que le premier terme à droite tend vers 0 quand $N \to \infty$, on obtient le résultat annoncé. $\square$

H. Cohen [5] a remarqué qu'une fois réexprimée de la manière suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 C_{2n}^n} = -2\int_0^{\ln \rho^{-2}} x \ln(2\sinh\frac{x}{2})dx,$$

cette formule n'est autre qu'une échelle trilogarithmique valide [27] pour la racine $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\mathrm{Li}_3(\rho^2) = \frac{4}{5}\zeta(3) + \frac{4}{5}\zeta(2)\ln\rho - \frac{2}{3}\ln^3\rho.$$

Les polylogarithmes sont définis par :

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

et une échelle valide [27] est simplement une combinaison linéaire :

$$\mathrm{L}_n(N,u) = \frac{\mathrm{Li}_n(u^N)}{N^{n-1}} - \left\{\sum_{r=1}^{n-1} \frac{A_r \mathrm{Li}_n(u^r)}{r^{n-1}} + \frac{A_0 \ln^n u}{n!}\right\}$$

avec u algébrique, qui s'écrit, avec les D_m rationnels :

$$\mathrm{L}_n = \sum_{m=2}^{n} \frac{D_m \zeta(m)\ln^{n-m} u}{(n-m)!}.$$

L'échelle en question se déduit [26] de l'équation fonctionnelle :

$$\mathrm{Li}_3(\frac{-z}{1-z}) + \mathrm{Li}_3(z) + \mathrm{Li}_3(1-z) = \zeta(3) + \zeta(2)\ln(1-z) - \frac{1}{2}\ln z \ln^2(1-z) + \frac{1}{2}\ln^2(1-z).$$

2.2 Une accélération brutale ... et efficace !

Définition 3. Le calcul précédent motive l'introduction des coefficients suivants (pour $k \leqslant n$) :

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 C_n^m C_{n+m}^m}$$

$$d_{n,k}^{(0)} = c_{n,k} C_{n+k}^k.$$

Bien évidemment, $d_{n,k(n)}^{(0)} \to \zeta(3)$ quand $n \to \infty$, uniformément en k.

Proposition 3. *On a une majoration du dénominateur des $c_{n,k}$:*

$$2d_n^3 c_{n,k} \in \mathbb{Z}$$

où $d_n = [1, 2, \ldots, n]$ désigne le p.p.c.m. des n premiers entiers ; il vérifie $\forall \varepsilon > 0, d_n = o(e^{n(1+\varepsilon)})$ par le théorème des nombres premiers. En particulier, on a $d_n < 3^n$ pour n assez grand.

Pour la minoration, il suffit de remarquer que[1] $\frac{C_{n+k}^k}{C_{n+m}^m} = \frac{C_{n+k}^{k-m}}{C_m^k}$ et que

$$\mathrm{ord}_p(C_n^m) \leqslant \lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \rfloor - \mathrm{ord}_p\, m = \mathrm{ord}_p\, d_n - \mathrm{ord}_p\, m.$$

On va maintenant définir successivement de nouvelles séries de coefficients, obtenus à chaque fois à partir des précédents par des combinaisons linéaires, jusqu'à obtenir des fractions ayant des propriétés intéressantes :

Définition 4. On fait sur les $d_{n,k}^{(0)}$ les combinaisons linéaires suivantes :

$$d_{n,k}^{(0)} \to d_{n,n-k}^{(0)} = d_{n,k}^{(1)}$$

$$d_{n,k}^{(1)} \to C_n^k d_{n,k}^{(1)} = d_{n,k}^{(2)}$$

$$d_{n,k}^{(2)} \to \sum_{j=0}^{k} C_k^j d_{n,j}^{(2)} = d_{n,k}^{(3)}$$

$$d_{n,k}^{(3)} \to C_n^k d_{n,k}^{(3)} = d_{n,k}^{(4)}$$

$$d_{n,k}^{(4)} \to \sum_{j=0}^{k} C_k^j d_{n,j}^{(4)} = d_{n,k}^{(5)}.$$

On obtient des $c_{n,k}^{(5)}$ par les mêmes opérations sur les C_{n+k}^k et on définit maintenant les nombres d'Apéry $a_n = d_{n,n}^{(5)}$ et $b_n = c_{n,n}^{(5)}$, i.e. : $b_n = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k_1} C_k^{k_1} C_{k_1}^{k_2} C_n^{k_1} C_n^{k_2} C_{2n-k_1}^n$.

Ces transformations ont conservé les propriétés suivantes : $\frac{a_n}{b_n} \to \zeta(3)$; $b_n \in \mathbb{N}$, $2d_n^3 a_n \in \mathbb{Z}$; et tout le miracle de la démonstration d'Apéry tient dans le résultat suivant :

Proposition 4. *Les coefficients a_n et b_n satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$n^3 u_n + (n+1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}$$

avec les conditions initiales $a_0 = 0, a_1 = 6, b_0 = 1, b_1 = 5$. De plus, les a_n/b_n sont les convergents de la fraction continue :

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{n^6}{(34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) + \cfrac{(n+1)^6}{\ddots}}}}.$$

Démonstration. La démonstration de ce fait a mobilisé beaucoup d'efforts de la part des consciencieux collègues d'Apéry, nous présentons la solution de Zagier et Cohen [4]. Il faut d'abord remarquer l'égalité, valable dans $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$, avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (C_n^k)^2 C_n^l C_k^l C_{2n-l}^n X_l = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (C_{2n-k}^n)^2 X_k.$$

[1] Si $m \in \mathbb{N}^*$ et p est premier, on note $\mathrm{ord}_p\, m$ la plus grande puissance de p qui divise m (valuation p-adique de m).

On note $b_{n,k}=(C_n^k)^2(C_{n+k}^k)^2$ et $a_{n,k}=b_{n,k}c_{n,k}$ (de cette façon $b_n=\sum_{k=0}^n b_{n,k}$ et $a_n=\sum_{k=0}^n b_{n,k}c_{n,k}$) ; on pose également : $Q_3(n)=34n^3+51n^2+27n+5$; remarquons qu'alors $Q_3(n-1)=-Q_3(-n)$. Il faut donc montrer :

$$\sum_{k=o}^{n}\left\{(n+1)^3 b_{n+1,k}-Q_3(n)b_{n,k}+n^3 b_{n-1,k}\right\}=0.$$

On applique la méthode du "creative telescoping" [23] (voir section 5) : on pose

$$B_{n,k}=4(2n+1)(k(2k+1)-(2n+1)^2)(C_n^k)^2(C_{n+k}^k)^2$$

alors :

$$B_{n,k}-B_{n,k-1}=(n+1)^3(C_{n+1}^k)^2(C_{n+1+k}^k)^2-Q_3(n)(C_n^k)^2(C_{n+k}^k)^2+n^3(C_{n-1}^k)^2(C_{n-1+k}^k)^2.$$

Pour le vérifier, on voit que : $\frac{c_{n,k+1}}{c_{n,k}}=\frac{(n+k+1)^2}{(n-k)^2(k+1)^4}$ et $\frac{c_{n+1,k}}{c_{n,k}}=\left(\frac{n+k+1}{n-k+1}\right)$, et on calcule...

De même, pour les $a_{n,k}$, on pose

$$A_{n,k}=B_{n,k}c_{n,k}+\frac{5(2n+1)(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}C_n^k C_{n+k}^k$$

et on vérifie que :

$$A_{n,k}-A_{n,k-1}=(n+1)^3 b_{n+1,k}c_{n+1,k}-Q_3(n)b_{n,k}c_{n,k}+b_{n-1,k}+c_{n-1,k}.$$

Suivant Van der Poorten [4], on remarque que :

$$(n+1)^3 b_{n+1,k}c_{n+1,k}-Q_3(n)b_{n,k}c_{n,k}+b_{n-1,k}+c_{n-1,k}$$
$$=(B_{n,k}-B_{n,k-1})c_{n,k}+(n+1)^3 b_{n+1,k}(c_{n+1,k}-c_{n,k})-n^3 b_{n-1,k}(c_{n,k}-c_{n-1,k})$$

et que $c_{n,k}-c_{n-1,k}=\frac{(-1)^k k!^2(n-k-1)!}{n^2(n+k)!}$, et le calcul reste horrible (mais direct) ...

Pour ce qui est de la fraction continue, les numérateurs et dénominateurs de ses convergents $\frac{p_n}{q_n}$ vérifient : $U_{n+1}+Q_3(n)U_n=n^6U_{n-1}$, avec : $p_0=1$, $p_1=5$, $q_0=0$, $q_1=6$. En posant $u_n=\frac{U_n}{n!^3}$, on tombe sur la relation de recurrence des u_n. □

Ces relations de récurrence permettent facilement de conclure au théorème fondamental suivant :

Théorème 3. *$\zeta(3)$ est irrationnel, de mesure d'irrationalité $\mu(\zeta(3))\leqslant\frac{\ln\alpha+3}{\ln\alpha-3}+1=13.417820\ldots$, où $\alpha=(1+\sqrt{2})^4$.*

Démonstration. En soustrayant les deux relations de récurrence, on obtient :

$$n^3(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)=(n-1)^3(a_{n-1}b_{n-2}-a_{n-2}b_{n-1})$$

dont on tire $a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n=\frac{6}{n^3}$ puis

$$|\zeta(3)-\frac{a_n}{b_n}|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{6}{k^3b_kb_{k-1}}=O(b_n^{-2}).$$

Or, en considérant les racines de l'équation limite $x^2-34x+1=0$ tirée de la relation de récurrence, on a $b_n=O(\alpha^n)$, où $\alpha=(1+\sqrt{2})^4$.

En utilisant la proposition 3, on a alors :

$$q_n=O(\alpha^n e^{3n}),\ \zeta(3)-\frac{p_n}{q_n}=O(q_n^{-(1+\delta)})$$

où $p_n=2d_n^3a_n$,$q_n=2d_n^3b_n$ et $\delta^{-1}=\frac{\ln\alpha+3}{\ln\alpha-3}=12.417820\ldots$, d'où le théorème. □

3 Where on earth did that come from ?

Telle fut la réaction des collègues d'Apéry lorsqu'il présenta l'esquisse de sa preuve [1] aux journées arithmétiques de Marseille-Luminy en juin 1978. Depuis, diverses interprétations ont été données aux nombres d'Apéry.

3.1 Les intégrales de Beukers

Dans son article [2], Beukers donne une démonstration alternative et plus rapide de l'irrationalité de $\zeta(3)$. Il introduit les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy} P_n(x) P_n(y) \, dx \, dy$$

où les $P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n) \in \mathbb{Z}[x]$ sont les polynômes de Legendre, et prouve le lemme suivant :

Lemme 1. *Si* $r > s$, $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} \, dx \, dy \, \in d_r^{-2}\mathbb{N}$.
Si $r = s$, $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} \, dx \, dy = \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ensuite, en dérivant sous le signe intégral par rapport aux exposants, on a, si $r > s$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln xy}{1-xy} x^r y^s \, dx \, dy \, \in d_r^{-3}\mathbb{N}$$

et si $r = s$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\ln xy}{1-xy} x^r y^r \, dx \, dy = 2 \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

On sait donc que $I_n = (A_n + B_n\zeta(3))d_n^{-3}$, avec A_n et B_n entiers et, en écrivant : $\frac{-\ln xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{dz}{1-(1-xy)z}$, ensuite en intégrant n fois par parties par rapport à x, on obtient :

$$I_n = \iiint_{[0,1]^3} \frac{(xyz)^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} \, dx \, dy \, dz.$$

On pose alors le changement de variables : $w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$ (notons qu'alors $z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$) ; puis, après n intégrations par parties par rapport à y, on arrive à :

$$I_n = \iiint_{[0,1]^3} \frac{(xyw)^n ((1-x)(1-y)(1-w))^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} \, dx \, dy \, dw.$$

La fonction $\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$ étant majorée par $(\sqrt{2}-1)^4$ sur $[0,1]^3$, on a la majoration, pour n suffisamment grand :

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| = d_n^3 I_n < 2\zeta(3) d_n^3 (\sqrt{2}-1)^{4n} < (\frac{4}{5})^n,$$

qui implique l'irrationalité de $\zeta(3)$ (on a utilisé que $(\sqrt{2}-1)^4 < \frac{4}{135}$). En reprenant les définitions, on montre que l'approximation de Beukers est la même que celle d'Apéry : $A_n = 2a_n$; $B_n = 2b_n$.

3.2 Le lien avec les approximants de Padé

Ce chapitre s'inspire des travaux de Gutnik, Nesterenko [11] et Beukers [7]. On cherche des polynômes A_n,B_n,C_n,D_n, avec $B_n(1) = 0$, de degré n, tels que :

$$A_n(z)\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z) = O(z^{2n+1})$$

$$2A_n(z)\mathrm{Li}_3(z) + B_n(z)\mathrm{Li}_2(z) + D_n(z) = O(z^{2n+1}).$$

Beukers a montré l'existence et l'unicité de tels polynômes. Il pose $A_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r z^r$ et $B_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \beta_r z^r$; il écrit le reste sous la forme :

$$A_n(z)\mathrm{Li}_2(z) + B_n(z)\mathrm{Li}_1(z) + C_n(z) = \sum_{t=2n+1}^{\infty} \tilde{R}_n(t) z^t$$

alors $\tilde{R}_n$ s'écrit :

$$\tilde{R}_n(z) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha_r}{(z-r)^2} + \frac{\beta_r}{z-r}.$$

De plus, en étudiant les racines et les pôles de R_n, par des arguments de degré, il trouve la formule explicite :

$$\tilde{R}_n = \frac{(z-n-1)(z-n-2)\dots(z-2n)}{z^2(z-1)^2\dots(z-n)^2}.$$

Notons qu'en décomposant en éléments simples, on trouve : $\alpha_r = (C_n^r)^2 (C_{2n-r}^r)^2$, et

$$\beta_r = -2\alpha_r \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n-k+j} - \sum_{\substack{0 \leqslant j,\, k \leqslant n \\ j+k \neq n}} \frac{1}{n-k-j} \right).$$

Si on fait $z = 1$ dans la deuxième équation, on trouve : $2A_n(1)\zeta(3) + D_n(1) = O(1)$, avec $A_n(1) = a_n$.

Dans son article [11], Nesterenko utilise ces résultats pour fournir une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ utilisant des techniques classiques de l'analyse complexe. Pour ceci, il introduit la fraction rationnelle suivante : $R_n(z) = \frac{(z-1)^2\dots(z-n)^2}{z^2(z+1)^2\dots(z+n)^2}$, qui est liée à $\tilde{R}_n$ par $R_n(z) = \tilde{R}_n(z+n)$. On vérifie facilement, en décomposant $R_n(z)$ en éléments simples, qu'on retrouve ainsi l'approximation de Beukers : $I = \sum_{p=1}^{\infty} R_n'(p) = A_n(1) + \zeta(3) D_n(1)$, avec donc $A_n(1) \in \mathbb{Z}$ et $d_n^3 D_n(1) \in \mathbb{Z}$.

On conclut en utilisant les lemmes techniques suivants (où L est une droite $\Re e(z) = C$, avec $0 < C < n+1$, parcourue de haut en bas) :

Lemme 2.

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 R_n(z) dz.$$

Lemme 3. *On a , lorsque $n \to \infty$:*

$$I = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} (\sqrt{2}-1)^{4n+2} (1 + o(1)).$$

Esquisse de démonstration. Le premier lemme découle du théorème des résidus appliqué sur un contour bien choisi. Pour le second, on utilise l'égalité suivante :

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 R_n(z) = \left(\frac{\Gamma(n+1-z)(\Gamma(z))^2}{\Gamma(n+1+z)} \right)^2$$

qui découle de la formule des compléments et de l'équation fonctionnelle de la fonction Γ. On développe ensuite en utilisant la formule de Stirling et un équivalent de Laplace permet de conclure. $\square$

L'irrationalité de $\zeta(3)$ découle de l'équivalent trouvé, en utilisant que $e^{3n}(\sqrt{2}-1)^{4n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

3.3 Les équations limites de Nesterenko

Dans le même article [11], Nesterenko introduit une autre fraction rationnelle que celle d'Apéry, dont il démontre en fait que certains des convergents coïncident avec ceux de la fraction d'Apéry. De fait, cette seconde fraction converge moins vite vers $\zeta(3)$, mais permet d'avoir des formules explicites plus simples.

Proposition 5.

$$2\zeta(3) = 2\frac{1}{2+\frac{a_2}{b_2+\dots\frac{a_n}{b_n}}}$$

où les coefficients a_n et b_n, $n \geqslant 2$, sont définis par :

$$\begin{array}{cccc} a_{4k+1} = k(k+1), & a_{4k+2} = (k+1)(k+2), & a_{4k+3} = (k+1)^2, & a_{4k+4} = (k+2)^2, \\ b_{4k+1} = 2k+2, & b_{4k+2} = 2k+4, & b_{4k+3} = 2k+3, & b_{4k+4} = 2k+2. \end{array}$$

De plus, les convergents correspondants à $n = 4k-2$ coïncident avec ceux de la fraction continue d'Apéry.

Démonstration. Ce résultat se déduit du lien qu'on peut trouver entre $\zeta(3)$ et des spécialisations de certaines fonctions G de Meyer. On pose :

$$G(a,b,c,d|z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(-s)^4 \frac{\Gamma(1-a+s)}{\Gamma(c-s)}\frac{\Gamma(1+b-s)}{\Gamma(d-s)} z^s ds$$

où L est un contour divisant les pôles de $\Gamma(-s)$ et $\Gamma(1-a+s)$, tel que l'intégrale soit absolument convergente. On définit ensuite

$$r_{2n} = G(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1}+2, \alpha_{n+2}+1|1)$$

$$\text{et } r_{2n+1} = \frac{\alpha_{n+3}^2}{\alpha_{n+2}\alpha_{n+4}}\delta G(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1}+2, \alpha_{n+2}+1|1),$$

où $\alpha_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\delta = z\frac{d}{dz}$. On a des relations de récurrence, découlant d'identités faciles sur les fonctions G :

$$\begin{aligned} 2r_1 &= 2r_0 + r_{-1}, \\ (k+2)r_{4k+1} &= (2k+2)r_{4k} + kr_{4k-1}, \\ (k+1)r_{4k+2} &= (2k+4)r_{4k+1} + (k+1)r_{4k}, \\ (k+2)r_{4k+3} &= (2k+3)r_{4k+2} + (k+1)r_{4k+1}, \\ (k+2)r_{4k+4} &= (2k+2)r_{4k+3} + (k+2)r_{4k+2}, \end{aligned}$$

et en explicitant les deux premiers termes ($r_{-1} = -1$ et $r_0 = 2\zeta(3) - 1$) de la suite, on a $r_n = 2g_n\zeta(3) + h_n$, avec $\frac{r_n}{g_n} \to 0$ (car les r_n sont bornés et on a une équation limite pour les g_n qui se déduit de celle des r_n et qui implique que $g_n \to \infty$), d'où une fraction continue convergeant vers $2\zeta(3)$, qui se ramène par une manipulation simple à celle annoncée. De plus, en calculant la relation de récurrence entre les r_{4n-2} on retrouve exactement celle d'Apéry, ce qui permet de voir que les convergents sont les mêmes. On a donc déduit les relations d'Apéry d'autres relations de récurrence un peu moins "magiques". □

En utilisant des représentations des g_n utilisant des fonctions hypergéométriques (et semblables à celles des r_n précédemment introduites), on obtient des valeurs explicites :

$$\begin{aligned} g_{4k} &= \textstyle\sum_{i=0}^k C_{k+i}^i C_{k+1+i}^i C_k^i C_{k+1}^i, \\ g_{4k-1} &= \textstyle\sum_{i=1}^k C_{k+i}^i C_{k+i}^i C_{k+1}^i C_{k-1}^{i-1}, \\ g_{4k-2} &= \textstyle\sum_{i=0}^k C_{k+i}^i C_{k+i}^i C_k^i C_k^i, \\ g_{4k-3} &= \textstyle\sum_{i=0}^k C_{k+i}^{i-1} C_{k-1+i}^i C_k^i C_k^i, \end{aligned}$$

et on peut trouver une équation limite explicite pour les g_n, en calculant des relations de récurrence sur les fonctions G :

$$(t+1)^2(t^2-6t+1) = 0.$$

3.4 Dernières remarques sur les nombres d'Apéry

Les b_n peuvent être interprétés comme des valeurs de fonctions hypergéométriques, qui sont définies à la section 5 : $b_n = {}_4F_3\left(\begin{array}{cccc|c} n+1 & -n & n+1 & -n & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{array}\right)$, où [2]

$$ {}_4F_3\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ b_1 & b_2 & b_3 & & z \end{array}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(a_1)_k(a_2)_k(a_3)_k(a_4)_k}{(b_1)_k(b_2)_k(b_3)_k}\frac{z^k}{k!}. $$

Wilson a étudié en général les ${}_4F_3\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ e & f & g & & 1 \end{array}\right)$, avec $a+b+c+d = e+f+g-1$.

Cowles et Chowla [16], Radoux [18] et Gessel [17] ont étudié les propriétés arithmétiques des b_n ; montrant des résultats du type :

pour p premier, $b_{n_0+pn_1+\ldots+p^s n_s} \equiv b_{n_0}b_{n_1}\ldots b_{n_s} \mod p$,

$b_{pn} \equiv b_n \mod p^3$ si $p \geqslant 5$ est premier,

$a_n \equiv 5^n \mod 8$;

$a_n \equiv 0 \mod 5$ si n a au moins un 1 ou un 3 dans sa décomposition en base 5.

Gessel étudie ensuite d'autres valeurs initiales de la récurrence $n^3u_n + (n+1)^3u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1}$.

Beukers [30] a également remarqué que la démonstration d'Apéry pouvait tenir dans la constatation que l'équation différentielle :

$$ \begin{aligned} (X^4 - 34X^3 + X^2)\frac{d^4y}{dX^4} &+ (10X^3 - 255X^2 + 5X)\frac{d^3y}{dX^3} \\ + (25X^2 - 418X + 4)\frac{d^2}{dX^2} &+ (15X - 117)\frac{dy}{dX} + y = 0 \end{aligned} $$

possède deux solutions, génératrices des nombres d'Apéry :

$$ a(X) = 6X + a_2X^2 + \ldots $$

$$ b(X) = 1 + b_1X + b_2X^2 + \ldots. $$

Or, $\alpha = (1-\sqrt{2})^4$ est le plus petit zéro de $X^2 - 34X + 1$, et $\lim_{x\to\alpha} \frac{a(x)}{b(x)} = \zeta(3)$.

Enfin, terminons en signalons qu'il existe une interprétation des nombres d'Apéry en termes de courbes elliptiques [30]...

4 Les divers essais de généralisations

Dans ce que nous avons vu jusqu'à présent, nous nous sommes uniquement intéressés au cas de $\zeta(3)$, mais on a la conjecture plus générale suivante : *Les $\zeta(2n+1), n \in \mathbb{N}^*$ sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$. Si ce résultat n'a pas encore été prouvé, Tanguy Rivoal a récemment démontré l'indépendance linéaire d'une infinité de ces nombres, en se servant notamment d'approximants de Padé.

4.1 Les démonstrations analogues pour $\zeta(2)$ et $\ln(2)$

La plupart des constructions impliquées dans la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ se généralisent à $\zeta(2)$, et permettent ainsi de (re)démontrer l'irrationalité de π^2 et d'en donner une mesure d'irrationalité. Tout d'abord, en adaptant légèrement la démonstration de la formule : $\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3C_{2n}^n}$, en n'oubliant pas que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, on montre :

$$ \zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2C_{2n}^n}. $$

[2] Pour que cela soit défini, il faut que les b_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$; ne soient pas des entiers négatifs.

Cette égalité peut également [5] se déduire de la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 C_{2n}^n} = 2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2.$$

On pose ensuite $b'_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 C_{n+k}^k$, et $a'_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 C_n^k c'_{n,k}$, où

$$c'_{n,k} = 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m^2} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{n+m+1}}{m^2 C_n^m C_{n+m}^m}.$$

Les b'_n sont entiers, et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n^2 a'_n \in \mathbb{N}$. Ensuite, on montre que, les valeurs initiales $a'_0 = 0, a'_1 = 5; b'_0 = 1, b'_1 = 3$ étant fixées, les a'_n et b'_n vérifient la relation de récurrence :

$$n^2 u_n - (n-1)^2 u_{n-2} = (11n^2 - 11n + 3)u_{n-1}.$$

Pour cela, on calcule :

$$c'_{n,k} - c'_{n-1,k} = 2(-1)^{n+k-1}\frac{k!^2(n-k-1)!}{n(n+k)!}.$$

Ensuite, on pose :

$$B'_{n,k} = (k^2 + 3(2n+1)k - 11n^2 - 9n - 2)(C_n^k)^2 C_{n+k}^k$$

$$A'_{n,k} = B'_{n,k} c'_{n,k} + 3(-1)^{n+k+1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!}.$$

Et on a

$$B'_{n,k} - B'_{n,k-1} = (n+1)^2 (C_{n+1}^k)^2 C_{n+k+1}^k - (11n^2 + 11n + 3)(C_n^k)^2 C_{n+k}^k - n^3 (C_{n-1}^k)^2 C_{n+k-1}^k$$

$$\begin{aligned} A'_{n,k} - A'_{n,k-1} &= (B'_{n,k} - B'_{n,k-1})c'_{n,k} + (n+1)^2 (C_{n+1}^k)^2 C_{n+k+1}^k (c'_{n+1,k} - c'_{n,k}) \\ &\quad + (C_{n-1}^k)^2 C_{n+k-1}^k (c'_{n,k} - c'_{n-1,k}) \\ &= (n+1)^2 (C_{n+1}^k)^2 C_{n+k+1}^k c'_{n+1,k} - (11n^2 + 11n + 3)(C_n^k)^2 C_{n+k}^k c'_{n,k} \\ &\quad - n^2 (C_{n-1}^k)^2 C_{n+k-1}^k c'_{n-1,k}. \end{aligned}$$

On voit que les a'_n et b'_n sont les convergents de la fraction continue :

$$\zeta(2) = \cfrac{5}{3 + \cfrac{25}{16 + \ddots + \cfrac{n^4}{(11n^2 + 11n + 3) + \cfrac{(n+1)^4}{\ddots}}}}.$$

Il "suffit" alors de démontrer l'estimée :

$$b'_n = \frac{(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}))^4}{2\pi\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \frac{(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^{5n}}{n}(1 + O(n^{-1}))$$

et on arrive à

$$\mu(\pi^2) \leqslant \theta = 11,85\ldots = \frac{\ln\alpha + 2}{\ln\alpha - 2} + 1,$$

où $\alpha = (1+\sqrt{2})^4$.

Les intégrales de Beukers permettent, encore plus facilement que pour $\zeta(3)$, de démontrer l'irrationalité de $\zeta(2)$. Les intégrales à considérer sont les

$$I'_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx\, dy.$$

Par intégration par parties,

$$I'_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx\, dy.$$

La fonction $\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$ étant majorée par $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$ sur $[0,1]^2$, on a, pour n assez grand :

$$|I'_n| \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx\, dy = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)$$

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| < d_n^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < 9^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) < \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

ce qui implique l'irrationalité de $\zeta(2)$.

4.2 Le cas de $\ln(2)$ et les essais divers...

On pose les b''_n tels que

$$B''(z) = (1 - 6z + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b''_n z^n$$

et les a''_n vérifiant :

$$A''(z) = (1 - 6z + z^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^z (1 - 6t + t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n z^n.$$

Les $b''_n = \sum_{k=0}^n C_n^k C_{n+k}^k$ sont entiers, et on montre facilement que : $a''_n \in d_n^{-1}\mathbb{N}$ (en trouvant une expression explicite pour ces derniers). De plus, les a_n et b_n vérifient l'équation de récurrence :

$$(n+1)u_n - Q_1(n)u_{n-1} + nu_{n-2} = 0$$

avec respectivement : $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $b_0 = 1, b_1 = 3$. En remarquant que

$$\lim_{n \to 3-2\sqrt{2}} \frac{A''(z)}{B''(z)} = \ln 2$$

on trouve un degré d'irrationalité $\mu(\ln 2) \leqslant 4,6621\ldots$.

Il est intéressant de remarquer que les polynômes Q_n de degré n impliqués dans les récurrences des convergents de $\zeta(3)$, $\zeta(2)$, $\ln(2)$, vérifient la propriété de symétrie par rapport à $-\frac{1}{2}$:

$$\forall m \in \mathbb{N},\ Q_n(m-1) = (-1)^n Q_n(-m)$$

(les coefficients de tels polynômes sont déterminés par leurs coefficients pairs si n est pair ; par leurs coefficients impairs si n est impair).

Pour ce qui est des généralisations de ces méthodes (intégrales de Beukers, récurrences "magiques", etc...) aux $\zeta(l)$, $l \geqslant 4$, tous les essais ont été infructueux, malgré l'existence ([4], [22]) de formules telles que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 C_{2n}^n} = \frac{17\pi^4}{3240} = \frac{17}{36}\zeta(4)$$

$$\zeta(5) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{4}{5n^2}\right) \frac{(-1)^n}{n^3 C_{2n}^n}.$$

La première égalité se démontre par une des innombrables formules démontrées par Lewin ([26], [27]) :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln^2(2\sin\frac{x}{2}) dx = \frac{17\pi^4}{3240}.$$

4.3 Les résultats de Rivoal

Les travaux de Rivoal visent à généraliser le théorème d'Apéry à d'autres valeurs de la fonction ζ en des entiers impairs. Dans ce domaine, il y a déjà eu des résultats intéressants : Gutnik a démontré que, pour tout rationnel non nul q, il y a un nombre irrationnel parmi $-\frac{3}{q}\zeta(3)+\zeta(2)$ et $\zeta(2)-2q\ln(2)$;

Beukers a aussi montré que les deux ensembles suivants contiennent chacun un irrationnel :

$$\left\{\frac{\pi^4}{\zeta(3)}\,,\ \frac{7\pi^4\ln(2)}{\zeta(3)}-15\pi^2\,,\ \frac{7\pi^6}{3240\zeta(3)}-\zeta(3)\right\}$$

$$\left\{\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\,,\ \frac{\zeta(3)^2}{\pi^2}-\frac{\pi^4}{360}\,,\ \zeta(3)\pi^2-30\zeta(5)\,,\ \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\pi^2}-\frac{\pi^6}{2268}\right\}.$$

L'article de Rivoal [14] est lui-même en partie fondé sur celui de Nikishin [12], qui étudie les approximants de Padé de : 1, $Li_1(x^{-1})=\ln(1-x^{-1})$, $Li_2(x^{-1}),\dots,Li_s(x^{-1})$; i.e. des polynômes $A_j(z)$, avec $d^o(A_j)\leqslant n$ si $j\leqslant q$; $d^o(A_j)<n$ si $q<j\leqslant s$, qui vérifient, si $\sigma=ns+q$:

$$\sum_{k=1}^{s}A_k(z)Li_k(z^{-1})-P(z)=\frac{c_0}{z^\sigma}+\frac{c_1}{z^{\sigma+1}}+\dots$$

avec P un polynôme de degré $\leqslant n-1$.

En utilisant l'égalité, $\forall k\geqslant 1$:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}dx=\frac{\Gamma(k)}{\alpha^k}$$

Nikishin trouve que :

$$\sum_{k=1}^{s}A_k(z)Li_k(z^{-1})=P(z)+\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{A_k(x)}{\Gamma(k)}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right)\frac{dx}{z-x}$$

$$P(z)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1\frac{A_k(z)-A_k(x)}{z-x}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx.$$

Il pose

$$R(t)=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{A_k(x)}{\Gamma(x)}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right)x^t dx.$$

C'est-à-dire que R est tel que :

$$\sum_{k=1}^{s}A_k(z)Li_k(z^{-1})-P(z)=\sum_{t=\sigma}^{\infty}\frac{R(k)}{z^k}.$$

Et il montre, par des arguments de degrés, que :

$$R(t)=\frac{t(t+1)\dots(t-\sigma+2)}{(t+1)^s\dots(t+n)^s(t+n+1)^s}$$

où $\sigma=ns+q$.

Ensuite, il montre que, si on écrit, avec $\varepsilon_k=\left\{\begin{array}{lll}0 & si & 0\leqslant j\leqslant q\\ 1 & si & q<j\leqslant s\end{array}\right.$:

$$R(t)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-\varepsilon_k}\frac{c_{k,j}}{(j+t+1)^k}$$

alors, $\forall 1\leqslant k\leqslant n$, on a $s!d_n^{s-k}c_{k,j}\in\mathbb{Z}$.

Esquisse de démonstration. On a :

$$c_{k,j} = \frac{1}{(s-k)!}\frac{d^{s-k}}{dt^{s-k}}R(t)(j+t+1)^s|_{t=-(j+1)}$$

$$R(t)(j+t+1)^s = P_0(t)\,\Pi_{a=1}^n F_{a,n}(t)\,\Pi_{a=1}^n F_{a,n-1}(t)$$

où

$$P_0(t) = (t-\sigma+2)\dots(t\sigma+s)$$

$$F_{a,n}(t) = \frac{(t-a)\dots(t-a-(n-1))}{(t+1)\dots(t+j)(t+j+2)\dots(t+n+1)}$$

$$F_{a,n-1}(t) = \frac{(t-a)\dots(t-a-(n-2))}{(t+1)\dots(t+j)(t+j+2)\dots(t+n)}.$$

On trouve alors pour les $c_{k,j}$, via une décomposition en éléments simples, des expressions en fonction des coefficients binômiaux, à une division par $n!$ près, d'où le résultat recherché. □

A l'aide de $R(t)$, et d'estimées des $|A_i|$, il montre alors que, pour $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, avec a et b entiers et $b^2 < ae^{-(s-1)(s\ln s+2s\ln 2)}$: $1, Li_1(x^{-1}), \dots, Li_s(x^{-1})$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

On utilise également les polylogarithmes dans la démonstration du résultat de Rivoal. On introduit :

$$R_n(t) = n!^{a-2r}\frac{(t-rn+1)_{rn}(t+n+2)_{rn}}{(t+1)_{n+1}^a}$$

où $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$ est le symbole de Pochammer.

On définit aussi :

$$\begin{array}{rcc} S_n(z) & = & \sum_{k=0}^{\infty} R_n(k)\, z^{-k} \\ c_{i,j,n} & = & \frac{1}{(a-i)!}\,\frac{d^{a-i}}{dt^{a-i}}\,R(t)(j+t+1)^a|_{t=-(j+1)} \\ P_{0,n}(z) & = & -\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n c_{i,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^i}\, z^{j-k} \\ P_{i,n}(z) & = & \sum_{j=0}^n c_{i,j,n} z^j. \end{array}$$

Lemme 4. *Si n est impair et a impair $\geqslant 3$, on a*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{3\leqslant i \text{ impair} \leqslant a} P_{i,n}(1)\,\zeta(i).$$

Démonstration. On a, par une décomposition en éléments simples,

$$S_n(z) = \sum_{i=1}^{a} P_{i,n}(z)L_i(\frac{1}{z}) + P_{0,n}(z).$$

La nullité du terme pour i=1 est due à une raison de convergence, pour les termes d'indice pair, on a une symétrie sur R_n :

$$R_n(x) = (-1)^{(n+1)a}\,R_n(-x-n-2)$$

qui entraîne $P_{i,n}(1) = 0$ si $(n+1)a+i$ est impair. □

On a ensuite, en adaptant la démonstration de Nikishin présentée plus haut, un second lemme :

Lemme 5. *On a $d_n^{a-i}P_{i,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.*

Notons une fois de plus le rôle joué par la symétrie dans les fractions rationnelles introduites, qui est à l'origine de la disparition des termes faisant intervenir les $\zeta(2n+1)$.

Il suffit ensuite d'estimer $S_n(1)$ pour conclure. Nous ne détaillerons pas cette partie de la démonstration. Rivoal utilise essentiellement la représentation intégrale suivante :

$$S_n(z) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} z^{(r+1)n+2} \int_{[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\Pi_{i=1}^{a+1} x_i^r (1-x_i)}{(z - x_1 x_2 \dots x_{a+1})^{2r+1}} \right)^n \frac{dx_1 \dots dx_{a+1}}{(z - x_1 \dots x_{a+1})^2}$$

et utilise le critère d'indépendance suivant, dû à Nesterenko (et que nous nous garderons bien de démontrer) :

Théorème 4. *Si on a $N \geqslant 2$ réels $\theta_1, \dots \theta_N$ et N suites $(p_{i,n})_{n\geqslant 0}$ tels que :*

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant N, \forall n \in \mathbb{N}\ p_{i,n} \in \mathbb{Z}$$

$$n\ln(\alpha_1) + o(n) \leqslant \ln|\sum_{i=1}^{N} P_{i,n}\theta_i| \leqslant n\ln(\alpha_2) + o(n) \text{ avec } 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < 1$$

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant N, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln|p_{i,n}| \leqslant n\log(\beta) + o(n) \text{ avec } \beta > 1$$

alors on a un résultat d'indépendance linéaire :

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}\theta_1 + \dots + \mathbb{Q}\theta_N) \geqslant \frac{\ln(\beta) - \ln(\alpha_1)}{\ln(\beta) - \ln(\alpha_1) + \ln(\alpha_2)}$$

L'énoncé précis du théorème de Rivoal est le suivant :

Théorème 5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que, si $n > N(\varepsilon)$,*

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \dots + \mathbb{Q}\zeta(2n-1) + \mathbb{Q}\zeta(2n+1)) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\ln(2)} \ln(n).$$

Le résultat de Rivoal permet seulement de conclure qu'il existe un $\zeta(2n+1)$ irrationnel pour un n entre 2 et 84, mais ce résultat peut être amélioré avec de meilleures approximations dans les démonstrations.

En changeant la parité de a, on inverse la symétrie de R_n, ce sont les ζ impairs qui disparaissent, et on obtient un résultat concernant les $\zeta(2n)$:

Théorème 6.

$$\dim_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(2) \dots + \mathbb{Q}\zeta(2n)) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\ln(2)} \ln(n).$$

Cette minoration est équivalente à la transcendance de π, dont on peut donner une mesure de transcendance en utilisant la méthode de Reyssat [13].

5 Termes hypergéométriques, "creative telescoping" et suites holonomes

Dans cet exposé, nous avons plusieurs fois utilisé la méthode du "creative telescoping".

On se donne un terme $F(n,k)$, et on veut prouver que les sommes [3] : $a(n) = \sum_k F(n,k)$ vérifient une récurrence du type :

$$\sum_{i=0}^{L} s_i(n) a(n+i) = 0$$

[3] Les valeurs prises par k dans la sommation sont sous-entendues, elles parcourent le plus souvent un ensemble fini, typiquement $k \in \{0, \dots, n\}$.

où $s_i \in \mathbb{R}[n]$.

Cette méthode consiste à trouver $G(n,k)$ satisfaisant

$$\sum_{i=0}^{L} s_i(n)F(n+i,k) = G(n,k) - G(n,k-1)$$

ce qui prouve alors l'égalité cherchée, à une constante additive près.

Définition 5. Une série $R = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est appelée *hypergéométrique* si son quotient $\frac{R_n}{R_{n+1}}$ est une fraction rationnelle de n.

Si on écrit le quotient sous la forme : $\frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{(n+a_1)\dots(n+a_p)}{(n+b_1)\dots(n+b_q)(n+1)}$, et qu'on normalise par : $R_0 = 1$, on peut toujours écrire R comme une fonction hypergéométrique classique[4], avec $p, \in \mathbb{N}$ ([19], [20]) :

$$R_n = {}_pF_q\left(\begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_p \\ b_1 & \dots & b_q \end{array} \middle| \, 1\right)$$

où ${}_pF_q$ est défini par :

$${}_pF_q\left(\begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_p \\ b_1 & \dots & b_q \end{array} \middle| \, z\right) = \sum_k \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

5.1 Les fondements théoriques : introduction aux suites holonomes

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on fait agir sur les suites multiples $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^s}$ les opérateurs $P(k,K) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^s} \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^s} c_{\alpha,\beta} k^\alpha K^\beta$, où les $c_{\alpha,\beta}$ sont presque tous nuls ;

et où[5] $(K_i u)(l_1,\dots,l_s) = u(l_1,\dots,l_i+1,\dots,l_s)$ est l'opérateur de translation,

et où $(k_i u)(l_1,\dots,l_s) = l_i u(l_1,\dots,l_i+1,\dots,l_s)$ l'opérateur de multiplication.

On note $\mathcal{A}_s$ l'algèbre de ces opérateurs (engendrée par $k_1,\dots,k_s$; $K_1,\dots,K_s; K_1^{-1},\dots,K_s^{-1}$, avec les relations de commutations : $K_iK_j = K_jK_i$, $k_iK_j = K_jk_i$ si $j \neq i$; $K_ik_i = (k_i+1)K_i$).

On définit ensuite le symbole de $P(k,K)$, constitué des termes de plus haut degré en k (où $m = \sup\{|\alpha|,\ \alpha \in \mathbb{Z}^s : \exists\beta \in \mathbb{Z}^s\ c_{\alpha,\beta} \neq 0\}$) :

$$\sigma(P)(\xi,z) = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^s} c_{\alpha,\beta} \xi^\alpha z^{\sup(\alpha-\beta,0)}.$$

On associe alors à $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^s}$ sa variété caractéristique

$$V_u = \{(\xi,z) \in (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^s | \, \sigma(P)(\xi,z) = 0, \text{pour tout}\, P \in \mathcal{A} telque Pu = 0\}.$$

On dira que u est holonome [21] si $\dim V_u = s$. Notons que, pour $s = 1$, $u(n)$ est holonome si et seulement si il existe $P \in \mathcal{A}$ tel que $Pu = 0$. Les suites holonomes forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel stable par k_i, K_i ; les suites hypergéométriques sont holonomes, les sommes de fonctions holonomes (par rapport à un sous-ensemble des variables, lorsque celles-ci sont définies) sont holonomes. Par exemple, si on somme un terme hypergéométrique $F(n,k)$, on sait que la somme $f(n) = \sum_k F(n,k)$ vérifie une équation du type $P(k,K)f(k) = 0$. Notons enfin que cette théorie admet un équivalent continu : la théorie des fonctions holonomes [21].

[4]Pour que cela soit défini, il faut que les b_i, …, b_q ; ne soient pas des entiers négatifs.

[5]On note $k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \dots k_s^{\alpha_s}$ et $k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \dots k_s^{\alpha_s}$.

5.2 Les algorithmes de Gosper et de Zeilberger

Soit t_n un terme hypergéométrique. On se pose la question de la sommation indéfinie, c'est-à-dire : Existe-t-il z_n hypergéométrique tel que : $z_{n+1} - z_n = t_n$?

Dans l'affirmative, on dit que t_n est Gosper-sommable. L'algorithme de Gosper, très simple (il se fonde sur une décomposition des fractions rationnelles...) permet de répondre avec certitude à cette question : si on lui donne t_n, il nous rend z_n s'il existe, et sinon montre qu'il n'existe pas.

On considère maintenant $F(n,k)$ doublement hypergéométrique (en chacun des ses arguments) et $f(n) = \sum_k F(n,k)$. Pour calculer ce type de somme, Zeilberger [22] montre qu'il existe toujours une fraction rationnelle $R(n,k)$ et une récurrence du type :

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n)F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$$

où $G(n,k) = R(n,k)F(n,k)$. Si on donne $F(n,k)$ à l'algorithme de Zeilberger, il nous rend la récurrence satisfaite par F et la fraction R correspondante.

Dans la plupart des cas, la récurrence se réduit à

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

Dans ce cas, (F,G) est appelée une paire W-Z (Remarquons la nouvelle symétrie entre n et k). L'algorithme de soeur Céline Fasenmyer, du même type que ceux de Gosper et de Zeilberger, fournit, étant donné une somme $f(n) = \sum_k F(n,k)$, avec F doublement hypergéométrique, une relation de récurrence $\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n)F(n-j,k-i) = 0$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}[n]$, de laquelle on déduit une récurrence sur $f(n)$.

5.3 Les applications pratiques

Les dérivés de ces algorithmes, non seulement donnent des preuves d'identités hypergéométriques telles que $f(n) = \sum_k F(n,k)$, mais en plus nous donnent la "clé" $(R(n,k))$ à partir de laquelle la démonstration de ce fait devient une vérification directe.

Des modifications de l'algorithme de Zeilberger, fondées sur le phénomène de dualité W-Z, permettent également de générer automatiquement de nouvelles identités sur les fonctions hypergéométriques (identités compagnes, duales...).

Pour donner un exemple simple, pour prouver l'identité ([20], [21], [22] pour d'autres exemples) :

$$f(n) = \sum_k F(n,k) = \sum_k \frac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n} = 1.$$

On tape $WZ[F,n,k]$ sur Mathematica et il nous fournit

$$R(n,k) = -\frac{k^2(3n-2k+3)}{2(2n+1)(n-k+1)^2}.$$

Il nous reste alors à poser $G(n,k) = R(n,k)F(n,k)$ et à vérifier que :

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k).$$

Les algorithmes de Zeilberger nous donnent alors gratuitement l'identité duale :

$$\sum_k (3k-2n)(C_n^k)^2 C_{2k}^k = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est intéressant de constater qu'un résultat tel que notre proposition 4, qui pouvait mobiliser l'énergie et l'intelligence de plusieurs mathématiciens pendant plusieurs semaines il y a encore vingt ans peut maintenant être prouvé en tapant une ligne de Mathematica ou de Maple.

Voir à ce sujet le livre de Zeilberger [22], qui traite tout cela en détail et fournit les "package" Maple et Mathematica.

6 Une conjecture générale sur les polyzêtas

Définition 6. La *fonction polyzêta* d'ordre r est définie, si $s = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$, $Re(s_1 + \ldots + s_r) > r$, par :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{0 < n_1 < \ldots < n_r} n_1^{-s_1} \ldots n_r^{-s_r}.$$

Cette fonction admet un prolongement méromorphe [24] (avec pôles inclus dans les sous-espaces : $s_1 = 1$; $s_1 + s_2 = -1, 0, 1, 2$; ..., définis par :

$$\Gamma(s_1) \ldots \Gamma(s_r) \zeta(s_1, \ldots, s_r) = \underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{r} t_1^{-s_1} \ldots t_r^{-s_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{e^{\sum_{i=1}^r t_i} - 1} dt_1 \ldots dt_r.$$

On appelle généralement polyzêtas (convergents) les valeurs des fonctions polyzêtas aux points entiers $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$, avec $k_i \in \mathbb{N}, k_i \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant r$ et $k_1 \geqslant 2$.

On note A l'algèbre unifère associative libre des polynômes non commutatifs en une infinité de variables $y_1, y_2, \ldots$; i.e. l'algèbre engendrée par les mots $w = y_{k_1} \ldots y_{k_r}$, avec $r \in \mathbb{N}, k_1, \ldots, k_r > 0$ ($r = 0$ correspond au mot vide).

On note, suivant Cartier [24], $h^1 = A \setminus \{\emptyset\}$. On associe à un mot $y_{k_1} \ldots y_{k_r}$ une série formelle quasi-symétrique[6] : $Q(k) = Q(k_1, \ldots, k_r) = \sum\limits_{0 < n_1 < \ldots < n_r} t_{n_1}^{k_1} \ldots t_{n_r}^{k_r}$.

6.1 Le produit de mélange lié aux séries

Pour $s, s' \in \mathbb{N}; s, s' \geqslant 2$, on peut écrire le produit $\zeta(s)\zeta(s')$ sous la forme (formule de réflexion) :

$$\begin{aligned} &\zeta(s)\zeta(s') \\ &= \sum_{n > n' \geqslant 1} n^{-s} (n')^{-s'} + \sum_{n' > n \geqslant 1} n^{-s} (n')^{-s'} + \sum_{n \geqslant 1} n^{-s-s'} \\ &= \zeta(s, s') + \zeta(s', s) + \zeta(s + s'). \end{aligned}$$

Plus généralement, on peut exprimer, si $s = (s_1, \ldots, s_k)$ et $s' = (s'_1, \ldots, s'_{k'})$ sont deux suites d'entiers strictement positifs avec $s_1 \geqslant 2$, $s'_1 \geqslant 2$, la relation de mélange liée aux séries [29] :

$$\zeta(s)\zeta(s') = \sum_{\sigma} \zeta(\sigma)$$

où on somme sur les suites σ sommes terme à terme de deux suites de même longueur sans zéro commun obtenues à partir de s et de s' en insérant des zéros (éventuellement au début ou à la fin).

Ceci est en fait valable [24] pour des séries formelles du type :

$$\sum_{n_1 > \ldots > n_k \geqslant 1} t_{n_1}^{s_1} \ldots t_{n_k}^{s_k}$$

et décrit la structure d'algèbre de $QSym$, l'algèbre des fonctions quasi-symétriques.

$QSym$ est engendrée par les $Q(k), k \in (\mathbb{N}^*)^r$. On pose alors $X = \{x_0, x_1\}$, et X^* l'ensemble des mots formés sur l'alphabet X. Si B est l'algèbre construite sur $X^* x_1$, on associe à y_s le mot $x_0^{s-1} x_1$; à un mot $y_{k_1} \ldots y_{k_r}$ le mot $x_0^{k_1 - 1} x_1 \ldots x_0^{k_r - 1} x_1 \in X^* x_1$

Les mots convergents sont les éléments de $x_0 X^* x_1$ (correspondants aux $y_{k_1} \ldots y_{k_r}$, avec $k_1 \geqslant 2$). Ils engendrent une sous-algèbre $h^0 \subset h^1$ telle que $h^1 = h^0[x_0]$.

[6] Rappelons qu'une série formelle $F(t_1, t_2, \ldots)$ est dite quasi-symétrique si $\forall k \in \mathbb{N}^* \, \forall s \in (\mathbb{N}^*)^r$, le coefficient de $t_{n_1}^{s_1} \ldots t_{n_k}^{s_k}$ avec $n_1 < \ldots < n_k$ ne dépend pas de $(n_1, \ldots, n_k)$).

On définit, sur X^*x_1, la loi associative et commutative $\star$ par récurrence (où $y_s = x_0^{s-1}x_1$) :

$$\forall w \in X^*x_1,\ e \star w = w$$

$$\forall\, w, w' \in X^*x_1,\ \forall\, t, s \in (\mathbb{N}^*)^r,\ (y_s w) \star (y_t w') = y_s(w \star y_t w') + y_t(y_s w \star w') + y_{s+t}(w + w').$$

Cette multiplication fait de h^1 une algèbre, notée $h^1_\star$. Les mots convergents $y_{k_1} \dots y_{k_r}, r \in \mathbb{N}^*, k_1 \geqslant 2$ engendrent une sous-algèbre $h^0_\star \subset h^1_\star$. La correspondance $y_{k_1}, \dots, y_{k_r} \longleftrightarrow Q(k_1, \dots, k_r)$ s'étend en un isomorphisme d'algèbres entre $h^1_\star$ et $QSym$. Si on compose cet isomorphisme restreint à $h^0_\star$ avec le morphisme d'évaluation des séries formelles convergentes en $y_i = \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}^*$, on obtient un homomorphisme d'algèbres

$$\hat{\zeta} : h^0_\star \to \mathbb{R} : \hat{\zeta}(y_{k_1}, \dots, y_{k_r}) = \zeta(k_1, \dots, k_r).$$

Le produit de mélange lié aux séries donne lieu à des relations du type :

$$\zeta(a)\zeta(b,c) = \zeta(a+b,c) + \zeta(b,a+c) + \zeta(a,b,c) + \zeta(b,a,c) + \zeta(b,c,a).$$

6.2 Le produit de mélange lié aux intégrales

On note Δ_p le simplexe standard de $\mathbb{R}^p$: $\Delta_p = \{t \in \mathbb{R}^p |\, 0 < t_p < \dots < t_1 < 1\}$, et $\omega_0(t) = \frac{dt}{t}$, $\omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$. Alors, si $x_{\varepsilon_1} \dots x_{\varepsilon_p}$ est le mot associé à $s \in (\mathbb{N}^*)^r, s_1 \geqslant 2$ via la bijection $y_s \leftrightarrow x_0^{s-1}x_1$:

$$\zeta(s) = \int\limits_{\Delta_p} \prod_{i=1}^{p} \omega_{\varepsilon_i}(t_i)\ dt_1 \dots dt_p.$$

Une formule de mélange des intégrales est obtenue en décomposant $\Delta_p \times \Delta_{p'}$ en $C^p_{p+p'}$ simplexes[7] :

$$\left(\int\limits_{\Delta_p} \prod_{i=1}^{p} \omega_{\varepsilon_i}(t_i)\ dt_1 \dots dt_p\right)\left(\int\limits_{\Delta_{p'}} \prod_{i=1}^{p'} \omega_{\varepsilon_{p+i}}(t_i)\ dt_1 \dots dt_p\right) = \sum_{\sigma \in S_{p,p'}} \left(\int_{\Delta_{p+p'}} \prod_{i=1}^{p+p'} \omega_{\varepsilon_{\sigma(i)}}(t_i)\ dt_1 \dots dt_p\right).$$

Ce produit correspond à un produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ défini par récurrence sur X^*x_1 :

$$e \sqcup\!\sqcup w = w = w \sqcup\!\sqcup e; (x_i u) \sqcup\!\sqcup (x_j v) = x_i(u \sqcup\!\sqcup x_j v) + x_j(x_i u \sqcup\!\sqcup v)$$

pour i, j, u, v, w dans les bons espaces comme plus haut.

Ceci définit des structures d'algèbres $h^1_{\sqcup\!\sqcup}$ sur X^*x_1, $h^0_{\sqcup\!\sqcup} \subset h^1_{\sqcup\!\sqcup}$ sur les mots convergents telles que

$$\hat{\zeta} : h^0_{\sqcup\!\sqcup} \to \mathbb{R} : y_{s_1} \dots y_{s_k} \mapsto \hat{\zeta}(s_1, \dots, s_k)$$

soit un homomorphisme.

6.3 Les polylogarithmes

On a déjà défini les $\mathrm{Li}_k(z)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. On peut aussi introduire [25], pour $s \in (\mathbb{N}^*)^r$, des polylogarithmes généralisés

$$\mathrm{Li}_{s_1 \dots s_r}(z) = \sum_{n_1 > \dots \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}}$$

et

$$\mathrm{Li}_{x_0^s}(z) = (-1)^s \int_{1 > t_s > \dots > t_1 > z} \frac{dt_1 \dots dt_s}{t_1 \dots t_s} = \frac{1}{s!}(\ln z)^s.$$

[7] On note : $S_{p,p'} = \{\sigma \in S_{p+p'} | \sigma(0) < \dots < \sigma(p), \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+p')\}$.

Li est alors un homomorphisme d'algèbres[8] (où on a noté $x_{\varepsilon_1}\dots x_{\varepsilon_p}$ le mot de X^*x_1 associé à $y_{s_1}\dots y_{s_r}$) :

$$Li : h^1_{\sqcup\!\sqcup} \to \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus[1;\infty[) : x_0^{s_1-1}x_1\dots x_0^{s_r-1}x_1 = \prod_{i=1}^{p} x_{\varepsilon_i} \mapsto \mathrm{Li}_{s_1\dots s_r}(x) = \int_0^x \prod_{i=1}^{p} \omega_{\varepsilon_i}(t_i)\, dt_1\dots dt_p.$$

La série génératrice

$$\mathbf{Li}(z) = \sum_{w\in X^*} \mathrm{Li}_w(z)w$$

est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dz}\mathbf{Li}(z) = \left(\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z}\right)\mathbf{Li}(\mathbf{z}).$$

L'étude [28] de la monodromie de cette dernière équation a permis à Petitot et à ses collègues de montrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{C}$ des Li_w, $w \in X^*$, c'est-à-dire que le morphisme Li, défini ci-dessus, est injectif.

6.4 Les relations d'Hoffman et la conjecture diophantienne

On déduit de ce qui précède que : $\hat{\zeta}(\alpha\star\beta) = \hat{\zeta}(\alpha)\hat{\zeta}(\beta)$,
et $\hat{\zeta}(\alpha \sqcup\!\sqcup \beta) = \hat{\zeta}(\alpha)\hat{\zeta}(\beta)$. En combinant formellement les relations de mélange, on obtient les relations d'Hoffmann, puisque $(x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1\star w)$ est convergent :

$$\forall w \in x_0X^*x_1,\ \hat{\zeta}(x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1\star w) = 0.$$

De ces relations, on déduit notamment facilement des identités telles que :

$$\zeta(5) = 2\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

Comme on a : $x_1\star x_1 = 2x_1^2 + x_0x_1$ et $x_1 \sqcup\!\sqcup x_1 = 2x_1^2$, puisque $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \neq 0$, il est impossible d'étendre le morphisme $\hat{\zeta}$ à $h^1_\star$ et $h^1_{\sqcup\!\sqcup}$ simultanément. On le fait donc séparément,en notant $\zeta^\star$, $\zeta^{\sqcup\!\sqcup}$ les morphismes correspondants : il suffit, pour chaque loi $\sqcup\!\sqcup$ ou $\star$, d'imposer une valeur pour $\zeta^\star(1)$, $\zeta^{\sqcup\!\sqcup}(1)$, puisque $h^1_\star = h^0_\star[x_0]$ et $h^1_{\sqcup\!\sqcup} = h^0_{\sqcup\!\sqcup}[x_0]$.

Les relations de Newton sur les fonctions symétriques : si on pose, pour $s \geqslant 0$ et $t = (t_1, t_2, \dots)$:

$$\psi_s(t) = \sum_{n\geqslant 1} t_n^s$$

$$\sigma_s(t) = \sum_{n_1>\dots>n_s\geqslant 1} t_{n_1}\dots t_{n_s}$$

on a l'égalité dans $\mathbb{Q}[[t]]$:

$$\sum_{s\geqslant 0}\sigma_s(t)z^s = \exp\left\{-\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\psi_k(t)\frac{z^k}{k}\right\}.$$

Cette relation se traduit par l'égalité :

$$\sum_{p\geqslant 0}\zeta^\star\underbrace{(1,\dots,1)}_{p}z^p = \exp\left\{\zeta^\star(1)z - \sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\zeta(k)\frac{z^k}{k}\right\}$$

[8]On note, si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

formule qu'il est intéressant de comparer avec le développement :

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \exp\left\{\gamma z - \sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\zeta(k)\frac{z^k}{k}\right\}.$$

Pour formuler la conjecture diophantienne, il faut considérer la $\mathbb{Q}$-algèbre MZV_{conv}, engendrée par les polyzêtas symboliques convergents [29] $Ze(s)$, $s \in (\mathbb{N}^*)^r$, $r \in \mathbb{N}^*, s_1 \geqslant 2$ vérifiant les relations :

$$Ze(w)Ze(w') = Ze(w \star w'),\ \forall w, w' \in x_0X^*x_1$$

$$Ze(w)Ze(w') = Ze(w \sqcup\!\sqcup w'),\ \forall w, w' \in x_0X^*x_1$$

$$Ze(x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1 \star w) = 0,\ \forall w \in x_0X^*x_1.$$

La conjecture diophantienne affirme alors que le morphisme naturel de spécialisation $Ze(s) \mapsto \zeta(s)$ de MZV_{conv} dans $\mathbb{C}$ est injectif (i.e. toutes les relations polynomiales entre polyzêtas se déduisent [24] des trois types de relations précités). Ceci implique notamment [24] l'indépendance algébrique des $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour que ceci permette effectivement de décrire conjecturalement les relations de dépendance algébrique entre les polyzêtas, il faut encore être capable de décrire MZV_{conv}. On introduit les $\mathcal{Z}_k$, sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les polyzêtas de poids $|k| = \sum_{k=1}^r k_i$.

Zagier a conjecturé que la somme $\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathcal{Z}_k$ était directe, et que si $d_k = \dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k$, on a la relation de récurrence :

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$

C'est-à dire que, puisque $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathcal{Z}_1 = 0$, $\mathcal{Z}_2 = \mathbb{Q}\pi^2$, on a la série génératrice :

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}.$$

Toutes ces conjectures ont été justifiées par des calculs numériques.

7 Bibliographie structurée

Apéry et ses commentateurs...

[1] R. APERY : *Irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$*
Société Mathématique de France, Astérisque 61 (1979), p.11-13.
[2] F. BEUKERS : *A note on the irrationality of $\zeta(3)$*
Bull. London Math. Soc., 11, 268-272 (1979).
[3] E. REYSSAT : *Irrationalité de $\zeta(3)$ selon Apéry*
Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 20ème année, 1978/1979.
[4] A. VAN DER POORTEN : *A Proof that Euler Missed... Apéry's proof of the Irrationality of $\zeta(3)$* - Math.Intell. 1, 195-203 (1979)
[5] A. VAN DER POORTEN : *Some wonderful formulae...Footnotes to Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$* - Séminaire Delange-Pisot-Poitou (théorie des nombres)- 20ème année- 1978/1979.

Sur les approximants de Padé et la théorie des nombres transcendants

[6] A. BAKER : *Transcendental Number Theory*
Cambridge University Press, 1975.
[7] F. BEUKERS : *Padé approximations in number theory*
Lecture Notes in Maths, Vol. 888, Springer-Verlag, New-York-Berlin (1981), pp. 90-99.
[8] E.N. NIKISHIN : *On simultaneous Padé approximants*
Math. USSR Sbornik, Vol. 4 (1982), no. 4.
[9] E. N. NIKISHIN et V.N. SOROKIN : *Rational Approximations and Orthogonality*
-Translations of Mathematical Monographs, Vol. 92 ; American Mathematical Society, 1991.
[10] V.N. SOROKIN : *Hermite-Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of $\zeta(3)$* -Uspekhi Mat. Nauk (Russian Math. Surveys), 49, no. 2, 167-168 (1994).

Vers les résultats de Gutnik, de Rivoal...

[11] Y.V. NESTERENKO : *A Few Remarks on $\zeta(3)$.*
Math. Notes, Vol. 59, no. 6, 1996.
[12] E.M. NIKISHIN : *On the irrationality of the values of the functions $F(x, s)$*
Mat. Sbornik 37, no. 3, 381-388 (1979).
[13] E. REYSSAT : *Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels.*
"Approximations diophantiennes et nombres transcendants",
Luminy, 1982 -Progress in Mathematics-Birkhäuser (1983).
[14] T. RIVOAL : *Irrationalité d'une infinité de $\zeta(2n + 1)$*
Preprint, Université de Caen.
[15] V.N. SOROKIN : *A transcendence measure for π^2*
Mat. Sbornik 187, no. 12, 1819-1852 (1996).

Les propriétés arithmétiques des nombres d'Apéry

[16] S. CHOWLA, J. CHOWLA et M. COWLES : *Congruence properties of Apéry's numbers.*
J. Number Theory 12, 188-190. (1980)
[17] I. GESSEL : *Some congruences for Apéry numbers.*
J. Number Theory 14 (1982),362-368.
[18] C. RADOUX : *Quelques propriétés arithmétiques des nombres d'Apéry.*
C.R. Acad. Sc. Paris-A 291 (1980), 567-569.

Les fonctions hypergéométriques, les fonctions holonomes et l'algorithme de Zeilberger

[19] P. APPELL et J. KAMPE de FERIET : *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*-Paris, Gauthier-Villars, 1926
[20] G. AUBRUN et U. SCHEERE : *La fonction hypergéométrique*, sujet proposé par Pierre Cartier, exposé de maîtrise 1999-2000, ENS Paris.
[21] P. CARTIER : *Démonstration "automatique" d'identités et fonctions hypergéométriques* Séminaire Bourbaki-44ème année, 1991-1992, no. 746.
[22] M. PETKOVSEK, H. S. WILF, D. ZEILBERGER : $A{=}B$
A.K. Peters,Ltd. 1996.
[23] D. ZEILBERGER : *The method of Creative Telescoping*
J. Symbolic Computation (1991) 11, 195-204.

Les polylogarithmes et les polyzêtas

[24] P. CARTIER : *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents.* Séminaire Bourbaki, 53ème année, 2000-2001, no. 885.
[25] J. GONZALEZ-LORCA : *Série de Drinfeld, monodromie et algèbres de Hecke.*
Thèse, Ecole Normale Supérieure, 1998, Rapport du LMENS,98,12.
[26] L. LEWIN : *Polylogarithms and associated functions.*
North Holland, 1981.
[27] L. LEWIN (edit.) : *Structural properties of polylogarithms*
Math. Surveys and monographs, vol.37, Amer. Math. Soc., 1991.
[28] J. OESTERLE : *Polylogarithmes*
Séminaire Bourbaki 1992-93, exp. no.762, Astérisque 1216 (1993), 49-47.
[29] M. WALDSCHMIDT : *Valeurs zêta multiples. Une introduction.*
Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 12 (2000), p.581-595.

Divers

[30] F. BEUKERS : *Irrationality of* π^2*, Periods of an elliptic curve and* $\Gamma_1(5)$
"Approximations diophantiennes et nombres transcendants", Luminy,1982 ; Progress in Maths, Birkhaüser, 1983.
[31] N. BOURBAKI : *Eléments de mathématiques ; algèbre, chapitres 4-7*
Paris : Masson, 1981.
[32] N. BOURBAKI : *Elements de mathématiques ; fonctions d'une variable réelle. Théorie élémentaire.*- Paris : Hermann, 1976.
[33] R.E. GREEN et S.G KRANTZ : *Function theory of one complex variable*
John Wiley et Sons, Inc., 1997.