Exercices de colles 2002/03

Guillaume Lafon

12 octobre 2002

Semaine 1 (séries)

Exercice 1. *Calculer* $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$.

Exercice 2. *Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 3. *Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{p=1}^{n} p^3}$.

Exercice 4. *Monter que quel que soit l'entier n, l'équation* $\ln(t) = \arctan(t) + n\pi$ *a une unique solution réelle positive* x_n. *Montrer que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge.*

Exercice 5. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. *Trouver un équivalent de* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *quand* $\lambda > 1$ *ou de* $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ *quand* $\lambda < 1$.

Exercice 6. *Etudier la convergence de* $\sum_{n=0}^{N} \sin(\pi e n!)$.

Exercice 7. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle telle que* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *converge. Montrer qu'il existe une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* $+\infty$ *telle que* $\sum_{n=0}^{N} v_n u_n$ *converge.*

Exercice 8. *Trouver un équivalent puis un développement asymptotique à l'ordre 2 de* $\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k^2}$. *Indication : on s'intéressera à* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 9. *Soit* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Montrer que* $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ *puis* $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$

Exercice 10. *Etudier la convergence de* $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$. *Etudier la convergence de* $\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{n}+e^{ni\phi}}$.

Exercice 11. *Soit* $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *et* $(u_n)_{n\in(N)}$ *la suite définie par* $u_{n+1} = \sin(u_n)$. *Montrer que* $\lim_{n\to 0} u_n = 0$ *puis trouver un développement asymptotique à l'ordre 2 de* u_n. *Indication : on s'intéressera à* $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}$.

Exercice 12. *Trouver une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *converge mais* $\sum_{n=0}^{N} u_n^3$ *diverge. Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que, pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *converge,* $\sum_{n=0}^{N} f(u_n)$ *converge, montrer que* f *est linéaire au voisinage de 0.*

Exercice 13. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *converge. Calculer* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k u_k}{n}$ *puis* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_1+\ldots+u_n}{n(n+1)}$.

Exercice 14. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que* $\lim_{n\to 0} u_n = 0$. *On pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ *et on suppose* $S_n - n u_n$ *bornée. Montrer que* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *converge. Trouver un contre-exemple à la réciproque.*

Semaine 2 (séries)

Exercice 15. *Trouver un équivalent de* $|\{i \in \{1,\dots,n\} \mid$ *le reste de la division de* n *par* i *est supérieur ou égal à* $\frac{i}{2}\}|$. *Indication : utiliser des parties entières.*

Exercice 16. *Soit* $f : [1,+\infty[- > \mathbb{R}_+^*$ *une fonction* C^1 *telle que* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'}{f} = -\infty$. *Montrer que* $\sum_{n=0}^N f(n)$ *converge et trouver un équivalent de* $\sum_{n=N}^{+\infty} f(n)$.

Exercice 17. *On pose* $\zeta(k) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^k}$. *Trouver* $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=2}^{n+1}\zeta(k) - n)$ *puis* $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=2}^{n}\frac{\zeta(k)}{k} - \ln(n))$

Exercice 18. *Soit* $a(n)$ *le plus grand facteur premier* n. *Montrer que* $\sum_{n=2}^N \frac{1}{na(n)}$ *converge. Indication : faire des petits paquets.*

Probleme 1. *Pour* $x > 0$, *on pose* $u_n(x) = x^n - E(x^n)$, $v_n(x) = d(x^n,\mathbb{Z})$, $P = \{x \mid \sum_{k=1}^n u_k(x)$ *converge (on note alors* $S(x)$ *la somme), et* $T = \{x \mid \sum_{k=1}^n v_k(x)$ *converge (on note alors* $U(x)$ *la somme).*

- *Montrer que* $\mathbb{N} \subset P \subset T$
- *Etudier l'appartenance à* P *et à* T *de* $a+\sqrt{b}$ *(*a *et* b *entiers) lorsque* $|a+\sqrt{b}| < 1$. *Calculer (si possible)* $S(x)$ *et* $U(x)$ *pour* $x = 1+\sqrt{2}$, $x = 2+\sqrt{2}$.
- *Montrer que* $T \subsetneqq \mathbb{R}$. *Indication : prendre* $x = \sqrt{n}$.
- *Etudier* $U(x)$ *sur [0,1[(variations, régularité, allure).*

Probleme 2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que* $\sum_{n=0}^N u_n$ *diverge. Soient* a *et* b *deux réels. On pose* $v_n = \frac{u_n}{1+u_n^a n^b}$. *Déterminer les couples* (a,b) *pour lesquels* $\sum_{n=0}^N v_n$ *converge quelle que soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *ceux pour lesquels* $\sum_{n=0}^N v_n$ *diverge, et ceux pour lesquels celà dépend de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Semaine 3 (algèbre linéaire)

Exercice 19. *Montrer que les familles de fonctions suivantes sont linéairement indépendantes :* $\{x \to e^{\lambda x}, \lambda\in\mathbb{R}\}, \{x \to \cos(\lambda x), \lambda\in\mathbb{R}\}, \{x \to |x-\lambda|, \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 20. *Soit* k *un corps fini à* q *éléments,* E *un* k*-ev de dimension* n. *Combien y a-t-il de vecteurs, de familles libres de* k *vecteurs, de bases, de droites, de sous-ev de dimension* r *dans* E *?. Combien d'éléments dans* $GL_n(E)$, $SL_n(E)$ *?*

Exercice 21. *Soit* E *un* k*-espace vectoriel de dimension finie* n. *Soient* A,B *deux sous-ev de même dimension* r. *Montrer qu'ils ont un supplémentaire commun.*

Exercice 22. *Soit* E *un* k*-espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que* $E = Im(f) \oplus \ker(f) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f^2)$.

Exercice 23. *Soient* p,$q \in \mathcal{L}(E)$ *deux projecteurs. Montrer que* $p+q$ *est un projecteur si et seulement si* $p\circ q = q\circ p = 0$ *et que, dans ce cas,* $Im(p+q) = Im(p)\oplus Im(q)$ *et* $\ker(p+q) = \ker(p)\cap\ker(q)$.

Exercice 24. *Soit* $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $E_+ = \{f\in E \mid \forall x<0, f(x)=0\}$, $E_- = \{f\in E \mid \forall x>0, f(x) = 0\}$, $E_0 = \{f\in E \mid f \text{est constante sur} \mathbb{R}$. *Montrer que* $E = E_0\oplus E_+\oplus E_-$.

Exercice 25. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $(\ker(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ev croissante, $(Im(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ev décroissante, et que ces deux suites stationnent au même rang.*
Soit $A = \cap Im(f^p)$, $B = \cup \ker(f^p)$, montrer que $E = A \oplus B$, et que A et B sont stables par f. Que peut-on dire des endomorphismes induits par f sur A et B ? Montrer que si $|k| > 2$, f est somme de deux automorphismes.

Exercice 26. *Caractériser $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0\}$. Indication : On cherchera à rendre M à une matrice de forme sympathique.*

Exercice 27. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Tr(M) = 0$. Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle. Montrer que M peut s'écrire sous la forme $XY - YX$ où $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 28. *On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{2, \dots, p-1\}, \forall j \in \{2, \dots, q-1\}, 4m_{i,j} = m_{i,j-1} + m_{i,j+1} + m_{i-1,j} + m_{i+1,j}\}$. Calculer la dimension de H et en trouver un supplémentaire.*

Probleme 3. *Trouver toutes les applications $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que $\forall A, b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.*

Indication : on pourra procéder comme suit :
- *Trouver les solutions constantes. Calculer $f(I)$ puis $f(A^{-1})$ en fonction de $f(A)$.*
- *Monter que $\forall A \in SL_n(\mathbb{C}), f(A) = 1$ (on pourra utiliser les transvections et montrer que celles-ci peuvent s'écrire comme commutateurs dans $SL_n(\mathbb{C})$).*
- *Montrer que, si f n'est pas constante, elle s'annule sur les matrices non inversibles.*
- *Conclure et donner des exemples.*

Probleme 4. *On définit une suite exacte comme étant une suite d'applications linéaires $0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} 0$ où on a $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, Im(f_i) = \ker(f_{i-1})$.*

Montrer que, dans ce cas, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim(E_i) = 0$. Montrer que, si F et G sont deux sous-ev de codimension finie d'un espace vectoriel E, $codim(F+G) = codim(F) + codim(G) - codim(F \cap G)$.

Montrer que, si on a le diagramme commutatif exact suivant (c'est-à-dire que les lignes sont des suites exactes et on a de plus $\beta \circ f_1 = g_1 \circ \alpha$, etc...) :

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_1} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_1} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5 \end{array}$$

où α, β, δ et ε sont des isomorphismes, alors γ est aussi un isomorphisme.

Exercice 29.

$$\textit{Calculer } \Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 30. *Calculer le déterminant de Cauchy $\det(A)$, où $a_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$, $(a_i)_{i\in\{1,\dots,n}$ et les $(b_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ sont des complexes non nuls.*

Semaine 4 (algèbre linéaire, suite)

Exercice 31. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $rg(f) = r$. Montrer que $f = \sum_{i=1}^{r} l_i e_i$ où $(e_1, \ldots, e_r)$ est une famille libre dans E et $(l_1, \ldots, l_r)$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.*

Exercice 32. *Soit k un corps infini et E un k-ev de dimension finie. Montrer que E ne peut pas s'écrire comme réunion de sous-ev propres.*

Soit A une partie finie de E. Montrer qu'on peut trouver $l \in \mathcal{L}(E)$ telle que $0 \notin l(A)$.

Exercice 33. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\widetilde{A}$ sa comatrice. Calculer $rg(\widetilde{A})$ en fonction de $rg(A)$. Résoudre l'équation $\widetilde{A} = A$ quand la dimension de l'espace est au moins 3.*

Exercice 34. *Soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille de vecteurs de k^n dont toute sous-famille de n vecteurs est libre. On pose $D_i = Vect(e_i)$. Soit $(e'_1, \ldots, e'_{n+1})$ une autre famille vérifiant la même propriété et Δ_i les droites associées. Montrer qu'il existe f dans $\mathcal{L}(E)$ bijective telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n+1\}, f(D_i) = \Delta_i$. Que peut-on dire de deux telles applications ?*

Exercice 35. *Soit $f \in \mathcal{M}_n(k)^*$. Montrer que $\exists A \in \mathcal{M}_n(k)$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(k), f(M) = Tr(AM)$. Pour quelles matrices A a t-on $\forall M, M' \in \mathcal{M}_n(k)$, $Tr(AMM') = Tr(AM'M)$?*

Exercice 36. *On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid d^o(P) \leqslant n\}$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire donnée par $\varphi(P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{1+t^2} dt$.*

Soient $x_0, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$. Comment calculer les λ_i ?

On suppose désormais $n = 2k + 1$ impair. Montrer qu'il existe $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$.

Exercice 37. *On définit le degré d'une extension de corps $K \subset L$, et on note $[L : K]$, comme étant la dimension de L en tant que K-ev (si elle est finie).*

Montrer que si $K \subset L \subset M$, avec des extensions de dimension finie, on a $[M : K] = [M : L] * [L : K]$ (théorème de la base télescopique).

Calculer le degré et le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 38. *Soient $K \subset L \subset M$ trois corps. On dit que L est une extension algébrique de K si tout élément de L est algébrique sur K. Montrer que M algébrique sur $K \Leftrightarrow L$ algébrique sur K et M algébrique sur L.*

On définit la clôture algébrique de K dans L, et on note $Cl_L(K)$, l'ensemble des éléments de L algébriques sur K. Montrer que $Cl_L(Cl_L(K)) = Cl_L(K)$. Montrer que, si L est algébriquement clos, $Cl_L(K)$ l'est aussi. Que peut-on dire de $Cl_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q})$?

Exercice 39. *Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et p un entier premier tel que $p \mid a_0, \ldots, a_{n-1}$, $p \nmid a_n$ et $p^2 \nmid a_0$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (critère d'irréductibilité d'Eisenstein).*

Calculer le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ d'une racine p-ième de l'unité, d'un racine p^2-ième primitive de l'unité (p premier).

Semaine 5 (réduction des endomorphismes)

Exercice 40. *Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 41. *Montrer qu'une matrice circulante est diagonalisable.*

Exercice 42. *Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible (c'est-à-dire que les seuls sous-ev stables par A sont $\{0\}$ et E) si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible.*

Exercice 43. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par $T(f)(x) = \int_0^1 |t-x| f(t)dt$. Vérifier que T est linéaire et calculer ses valeurs propres.*

Exercice 44. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (E k-ev de dimension finie) et $P \in k[X]$ tel que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus Im(f)$.*

Exercice 45. *Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $Q \subset \mathcal{L}(E)$ irréductible (les seuls sous-ev stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E). Montrer que $\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall q \in Q, f \circ q = q \circ f\} = \{homothéties\}$ (lemme de Schur). Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?*

Exercice 46. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ sinon. Calculer A^p et si possible A^{-1}. Calculer les valeurs propres de A et leurs multiplicités, diagonaliser A, calculer son polynôme minimal.*

Exercice 47. *Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(k)$, où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(k)$. On suppose D inversible et $CD = DC$. Montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$. Montrer que l'hypothèse D inversible est superflue (on pourra d'abord le montrer dans le cas où $k = \mathbb{C}$).*

Probleme 5. *On note $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f\, est\ \mathcal{C}^\infty\}$. On désigne par D l'opérateur de dérivation dans E et on note e_λ la fonction qui à x associe $e^{\lambda x}$.*

- *Montrer que $\forall y \in E, (D - \lambda I)(e_\lambda y) = e_\lambda D y$*
- *Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Résoudre dans E $(D - \lambda I)^\alpha(y) = 0$.*
- *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(D) = 0$ où P est un polynôme complexe. Quelle est sa dimension ?*
- *Soient P et Q deux polynômes complexes non nuls. On note $F = \ker Q(D)$. Montrer que, si $b \in F$, $P(D)(y) = b$ a une solution unique.*

Probleme 6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (E k-ev de dimension finie) de polynôme minimal Π_f. Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $P(f)(x) = 0$ et $E_x = \{P(f)(x)\}$.*

- *Montrer que P_x est bien défini, unique, et que $P(f)(x) = 0$ entraine $P_x \mid P$. Quelle est la dimension de E_x ?*
- *Montrer que si $E_x \cap E_y = \{0\}$, $P_{x+y} = P_x \wedge P_y$. Généraliser à plusieurs vecteurs.*
- *Montrer que, si $P_x \wedge P_y = 1$, $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$. Généraliser à plusieurs vecteurs.*
- *Montrer que $\exists x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$.*

Semaine 6 : réduction des endomorphismes

Exercice 48. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Que vaut $\mathcal{C}(U) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$? Et $\mathcal{C}(\mathcal{C}(u))$?*

Exercice 49. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit semblable à $2M$.*

Exercice 50. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(k)$ pour que $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.*

Exercice 51. *Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_q^n)$ est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.*

Exercice 52. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que f est nilpotent. Si* $\dim \ker f = 1$ *et g est diagonalisable, que peut-on dire de f et g ?*

Exercice 53. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que, pour tout polynôme complexe P, l'équation $P(X) = A$ a des solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Discuter le nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en fonction de A.*

Exercice 54. *Soit E un k-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit semi-simple si tout sous-ev de E stable par u a un supplémentaire stable par u. Montrerque, si $k = \mathbb{C}$, u est semi-simple ssi il est diagonalisable. Dans le cas général, montrer que u est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit de facteurs irréductibles deux àdeux distincts.*

Probleme 7. *Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$.*
- *Montrer que si $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $tr(f^p) = 0$, f est nilpotent.*
- *On pose, $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $[u, v] = u \circ v - v \circ u$. Montrer que, si $[[u, v], u] = 0$, $[u, v]$ est nilpotent.*
- *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $tr(u^p) = tr(g^p)$, u et v ont même polynôme caractéristique.*

Probleme 8. *Soit E un k-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $L_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$, qui à f associe $u \circ f$ et R_u qui à f associe $f \circ u$.*
- *Calculer* $\dim \ker L_u$, $\dim \ker R_u$.
- *Montrer que, si u est diagonalisable, L_u et R_u le sont aussi.*
- *Donner les matrices de L_u et R_u dans des bases adaptées.*
- *On pose $A_{u,v} = L_u - R_v$. Montrer que, si u et v sont diagonalisables, $A_{u,v}$ l'est aussi.*
- *Sur $k = \mathbb{C}$, montrer que si $A_{u,u}$ est diagonalisable, u l'est aussi (indication : on utilisera la décomposition de Dunford).*

Semaine 7 : Topologie

Exercice 55. *Soit A une partie de $\mathbb{R}_n$ telle que tout point de A est isolé. Montrer que A est dénombrable*

Exercice 56. *Montrer qu'un evn est complet si et seulement si toute série absoument convergente converge.*

Exercice 57. *Soit (E, d) un espace métrique, A, B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouvrtes U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.*

Exercice 58. *On pose $E = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f est Lipschitzienne\}$ et on définit $\forall f \in E, N(f) =$ $\sup_{x \in [0,1]} f(x) + \sup_{x \neq y} |\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|$. Montrer que N est une norme et que E est complet pour cette norme.*

Exercice 59. *On pose, $\forall x, y \in]0, +\infty[, \delta(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.Montrer que c'est une distance et qu'elle induit la même topologie que la distance usuelle. $]0, +\infty[$ est-ilcomplet pour cette distance ? Et $]0, 1[$?*

Exercice 60. *Soit E un esapce topologique, U un ouvert de E et B une partie de E. Montrer que $U \cup \overline{B} \subset \overline{U \cup B}$. On définit une partie A comme localement fermée si $\forall x \in A, \exists V$ voisinage de x tel que $V \cup A$ est fermé dans V. Montrer que c'est équivalent à être intersection d'un ouvert et d'un fermé de E.*

Exercice 61. *Soit (E,d) un espace métrique, A un fermé de E et $f : A \to \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ prolongeant f et telle que $\sup_{x\in A} g(x) = \sup_{x\in A} f(x)$ et $\inf_{x\in A} g(x) = \inf_{x\in A} f(x)$ (théorème de prolongement de Tietze-Urysohn).*

Probleme 9. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite négligeable si $\forall \epsilon > 0, \exists (a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A \subset \cap_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n| < \epsilon$.*
- *Montrer qu'une union dénombrable d'ensembles néglogeables est encore négligeable.*
- *Montrer qu'un ensemble négligeable est d'intérieur vide.*
- *Que dire de la négligeabilité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$?*

Soit $K \subset [0,1]$ l'ensemble de Cantor.
- *Montrer que K est négligeable.*
- *Montrer que K est fermé, d'intérieur vide, non dénombrable.*

Probleme 10. *Soit (E,d) un espace métrique, on note*
$\mathcal{C} = \{$suites de Cauchy dans $E\}$.
- *Montrer que, si $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, $d(u_n, v_n)$ converge. On notera $\delta(U,V)$ sa limite.*
- *On note $\widehat{E} = \mathcal{C}/\sim$, où $U \sim U'$ si $\delta(U,U') = 0$. Que vaut la classe d'équivalence de U si U converge ? Montrer que si $U \sim U'$, $\delta(U,V) = \delta(U',V)$.*
- *Montrer que δ est une distance sur $\widehat{E}$ et que E s'injecte isomtriquement comme partie dense dans $\widehat{E}$.*
- *Montrer que $\widehat{E}$ est complet et qu'il est l'unique espace complet (à isométrie près) dans lequel E s'injecte comme partie dense.*

Probleme 11. *Dans un espace topologique, on définit un G_δ comme une intersection dénombrable d'ouverts, un F_σ comme une union dénombrable de fermés.*
- *Montrer que le complémentaire d'un G_δ est un F_σ.*
- *Montrer qu'une union dénombrable de F_σ est un F_σ.*
- *Montrer qu'un fermé est un G_δ et un ouvert un F_σ. Donner un exemple de F_σ ni ouvert ni fermé*

On se place désormais sur $\mathbb{R}^n$ et on note Δ une partie dénombrable dense et ψ la fonction valant 1 sur Δ et -1 sur son complémentaire. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on notera $\Gamma(f)$ l'ensemble de ses points de continuité.
- *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, montrer que $\Gamma(\psi f) = \{x \mid f(x) = 0\}$.*
- *Montrer que tout fermé peut s'écrire $\Gamma(f)$, pour une fonction f convenable.*
- *Montrer la même chose pour un ouvert puis un G_δ.*
- *Montrer réciproquement que $\Gamma(f)$ est toujours un G_δ.*

Semaine 8 : Topologie (suite)

Exercice 62. *Soient A, B deux compacts disjoints dans un espace métrique E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.*

Exercice 63. *Soit E un espace compact et $f : E \to E$ continue telle que $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Montrer que f a un unique point fixe.*

Exercice 64. *Soit A une partie non vide d'un espace métrique E. On pose, pour $r > 0$, $V_r(A) = \{x \in E \mid d(x,A) < r\}$. Montrer que si A est compacte, U un ouvert de E et $A \subset U$, $\exists r > 0, V_r(A) \subset U$.*

Exercice 65. *Pour quelles valeurs de n existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue prenant exactement n fois chaque valeur ?*

Exercice 66. *Soit U un ouvert connexe (par arcs) de $\mathbb{R}^2$ et A une partie dénombrable de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \backslash A$ est connexe. Même question avec U ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ et A union dénombrable de droites.*

Exercice 67. *Un espace métrique A est dit précompact si $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N}, \exists x_1, \ldots, x_r \in A$ tels que $A \subset \cap B(x_i, \varepsilon)$. Montrer qu'un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Exercice 68. *Montrer qu'une fonction propre (l'image réciproque d'un compact est compacte) est fermée (l'image d'un fermé est fermée). En déduire que { polynômes unitaires de degré n à racines réelles } est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.*

Exercice 69. *On définit, pour $K_1, \ldots, K_n$ des compacts de $\mathbb{C}$ leur écart optimal par $\sigma(K_1, \ldots, K_n = \inf_{z \in \mathbb{C}} \varphi(z)$, où $\varphi(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(z, K_i)$. Calculer σ dans le cas de deux compacts puis résoudre l'équation $\varphi(z) = \lambda$ dans le cas de deux points et deux cercles. Calculer σ dans le cas de trois points.*

Probleme 12. *Soit (E, d) un espace métrique et $\mathcal{F} = \{$ parties fermées bornées non vides de $E\}$. Pour A, B dans $\mathcal{F}$, on pose $\lambda(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$ et $\Delta(A, B) = \sup \lambda(A, B), \lambda(B, A)$.*

- *Montrer que Δ est une distance sur $\mathcal{F}$.*
- *Montrer que $\{F \in \mathcal{F} \mid |F| \geqslant n\}$ est un ouvert.*
- *on suppose E compact. Montrer que, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et que $Y_{n+1} \subset Y_n$, (Y_n) converge vers $\cup Y_n$. Montrer que $\mathcal{F}$ est complet.*
- *Montrer que, si E est compact, $\mathcal{F}$ l'est aussi (utiliser que compact $\Leftrightarrow$ précompact complet).*

Semaine 9 : Intégration (révisions)

Exercice 70. *Calculer*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{[n(n+1)\ldots(n+n)]^{\frac{1}{n}}}{n}$
2. $\lim_{n\to\infty} [(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})^2 \ldots (1+\frac{n}{n})^n]^{\frac{1}{n^2}}$
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{k^3+n^3}}$
4. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
5. $\int \frac{1}{1-x^4} dx$
6. $\int \frac{1}{x^4+x^2+1} dx$
7. $\int x \tan^2(x) dx$
8. $\int \frac{x^3}{x+1} dx$
9. $\int \frac{1}{x^2-7x+10} dx$

Exercice 71. *Calculer $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.*

Exercice 72. *Montrer que $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ tend vers 0, puis trouver un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.*

Exercice 73. *Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \ldots =$ $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0,1]$.*

Exercice 74. *On pose $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Montrer que $S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$ converge. Généraliser.*

Exercice 75. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$. Que vaut $\lim_{(t,h)\to(0,0)} \frac{1}{th}[f(t+h) - f(t) - f(h) + f(0)]$?*

Exercice 76. *(La norme utilisée est la norme infinie). Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$, positive, bornée à dérivée seconde bornée.*
- *Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, tf'(x) \leqslant \| f \| + \frac{t^2}{2} \| f'' \|$.*
- *Montrer que f' est bornée et $\| f' \| \leqslant 2 \| f \| \| f'' \|$.*
- *Montrer que l'inégalité reste vraie pour f à valeurs complexes.*
- *Montrer que le 2 intervenant dans l'inégalité ne peut être amélioré (Indication : considérer une fonction 2-périodique, constante sur $[p - \frac{1}{2n}, p + \frac{1}{2n}]$, affine ailleurs, et ses primitives).*

Exercice 77. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^4$ telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0,1], \exists \eta \in]0,1[,\ f(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24} x^2(1-x)^2$. Montrer l'existence de $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, polynomiale de degré au plus 3 sur chacun des segments $[\frac{k}{n}, \frac{k}{n+1}]$ et telle que, $\forall k \in \{0,\ldots,n\}$ on ait $\phi_n(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$ et $\phi_n'(\frac{k}{n}) = f'(\frac{k}{n})$. Montrer que : $\| f - \phi \|_\infty \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{384 n^2}$.*

Probleme 13. *Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polyn6omes (vérifier son existence et son unicité) à coefficients rationnels vérifiant $\forall n \in \ltimes$, $Q''_{n+1}(X) = (n+1)Q'_n(X)$, $Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0$, et $Q_0(X) = X\, Q_1(X) = \frac{X(X-1)}{2}$. On note a_n le rationnel vérifiant $Q'_{n+1}(X) + a_n = (n+1)Q'_n(X)$, on admet que a_n est nul si n est impair, on note $B_n = (-1)^{\frac{n}{2}} a_n$ sinon (nème nombre de Bernouilli).*
- *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^{2n+3}$. Montrer que*

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}(f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)) + R_n,$$

  où $R_n = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 Q_{2n-1}(t) f^{(2n+3)}(t)dt$.
- *Montrer que $\int_0^1 Q_{2s-1}(t)\cos(2\pi nt)dt = (-1)^{s-1}\frac{(2s-1)!}{(2\pi n)^{2s}}$.*
- *Montrer que $\sum_{n=1}^N \cos(2\pi nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)}$. En déduire*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2s}} = \frac{(2\pi)^{2s}}{(2s-1)!}\frac{B_s}{4s} + \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!}\int_0^1 Q_{2s-1}(t)\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{2\sin(\pi t)}dt.$$

- *Montrer que $g(t) = \frac{Q_{s-1}(t)}{\sin(\pi t)}$ se prolonge de façon $\mathcal{C}^1$ à $[0,1]$ et que $F(\lambda) = \int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt$ tend vers 0 à l'infini.*
- *En déduire que $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2s}} = (2\pi)^{2s}\frac{B_s}{(2s)!}$.*

Semaine 10 : suites et séries de fonctions

Exercice 78. *Montrer qu'une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes est un polynôme.*

Exercice 79. *Soit $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$. Montrer que $\sum_{n=0}^N u_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sum_{n=0}^N (-1)^n u_n$ converge uniformément mais pas normalement.*

Exercice 80. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de fonctions K-Lipschitziennes (sur un segment). Montrer que la convergence est uniforme. Même question avec des fonctions convexes, l'intervalle étant ouvert et la convergence dans un intervalle fermé inclus dans son intérieur. A-t-on convergence uniforme sur tout l'intervalle ouvert ?*

Exercice 81. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ et $M > 0$ tels que $\forall x, y \ \mid f(x+y) - f(x) - f(y) \mid < M$. Montrer que $f = g + h$, où g est bornée et h une homothétie.*

Exercice 82. *Calculer $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$.*

Exercice 83. *On pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{E(nx)}}{n!}$. Etudier la continuité de f.*

Exercice 84. *On pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Quel est le domaine de convergence uniforme de f ?*

Exercice 85. *Soit $f : I = [0,1] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$. On pose $R_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ et $B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) R_n^k(x)$. Calculer $\sum_{k=0}^n (\frac{k}{n} - x)^2 R_n^k(x)$, en déduire que $\sum_{k, |\frac{k}{n} - x| \geqslant \eta} R_n^k(x) \leqslant \frac{1}{n\eta^2}$ puis que $B_n(f)$ converge uniformément vers f (les B_n sont appelés polynômes de Bernstein associés à f).*

Exercice 86. *Soit $f(x) = \sum_{n\geqslant 1}(\ln(n) - \ln(x+n) + \frac{x}{n}$.*
- *Quel est le domaine de définition de f ?*
- *On pose $t(x) = \exp S(x)$. Calculer $\frac{t(x+1)}{t(x)}$.*
- *On pose $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\exp -\gamma x t(x)$, où γ est la constante d'Euler. Calculer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.*
- *Montrer que S et Γ sont convexes.*
- *Calculer $\Gamma(p)$ et $S(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 87. *Soit $(E) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ à suppport compact $\}$. On pose, pour f, g dans $\mathcal{E}$, $f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$.*
- *Montrer que $*$ est commutative et distributive par rapport à $+$.*

Une suite de fonctions positives φ_n est appelée approximation de l'unité si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+infty} \varphi_n(t)dt = 1$ et $\forall \alpha > 0, \lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\alpha} \varphi_n(t)dt = 0$.
- *Montrer que, dans ce cas, $\varphi_n * f$ converge uniformément vers f.*
- *On pose $\varphi_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{a_n}$ si $\mid t \mid \leqslant 1$, 0 sinon. Montrer que, pour une bonne valeur de a_n, φ_n est une approximation de l'unité.*
- *Montrer que si f est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\varphi_n * f$ est un polynôme.*
- *Conclure.*

Probleme 14. *On définit, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.*
- *Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty]$.*
- *Montrer que, quand $s \to 1^+$, $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \circ(1)$.*
- *Montrer que $\forall s > 1$, $\frac{1}{\zeta(s)} = \Pi_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{p_n^s})$, où p_n est le nème nombre premier.*
- *Montrer que $\sum_{n=1}^\infty p_n$ diverge.*

Semaine 11 : espaces préhilbertiens

Exercice 88. *Soit E un espace hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est trigonalisable dans une base orthonormée. Montrer que, si f et g commutent, ils sont trigonalisables dans une même base orthonormée.*

Exercice 89. *Si $\mathbb{C}^n$ est muni d'une norme $\|.\|$, on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme donnée par $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Que vaut cette norme si on prend sur $\mathbb{C}^n$ les normes usuelles ?*

Exercice 90. *Soit E un espace euclidien, et u un projecteur sur E tel que $|||u||| \leqslant 1$. Montrer que u est un projecteur orthogonal.*

Exercice 91. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = T^*T$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs et une matrice unitaire U telles que $A = UT$.*

Exercice 92. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé vérifiant $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Montrer que E est préhilbertien.*

Exercice 93. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont on notera $X_1, \ldots, X_n$ les vecteurs colonnes. Montrer que $\mid \det(M) \mid \leqslant \Pi_{i=1}^n \|X_i\|^2$ (inégalité d'Hadamard). Quand a-t-on égalité ? En déduire que si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\forall i, j,\ \mid a_{i,j} \mid \leqslant c$, on a $\mid \det(M) \mid \leqslant c^n n^{\frac{n}{2}}$.*

Exercice 94. *Soit E un espace préhilbertien, $x_1, \ldots, x_n \in E$. On appelle G la matrice de terme général $< x_i|x_j >$ (matrice de Gram associée au système de vecteurs) et $g = \det(G)$. Montrer qu'une matrice est hermitienne positive si et seulement si elle est la matrice de Gram d'un système de vecteurs de E. Quand a-t-on $G = 0$? Si V est un sous-ev de E de base $(e_1, \ldots, e_n)$, montrer que $\forall x \in E,\ (d(x, V))^2 = \frac{g(e_1,\ldots,e_n,x)}{g(e_1,\ldots,e_n)}$.*

Exercice 95. *Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathbb{R} \mid M = {}^tM\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi_A \in \mathcal{L}(E) :\ M \mapsto {}^tAMA$. Montrer que $\mid \det(\varphi_A) \mid = \mid \det(A) \mid^{n+1}$.*

Exercice 96. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne positive, on note $\Gamma = \{A$ hermitienne positive $\mid \det(A) \geqslant 1\}$. Montrer que $\inf_{A\in\Gamma} Tr(AH) = n(\det(H))^{\frac{1}{n}}$ (on pourra utiliser que $\mid \det(A) \mid \leqslant \Pi a_{i,i}$). En déduire que, si $A, B \in \Gamma$, $[\det(A+B)]^{\frac{1}{n}} \geqslant \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}$. Redémontrer cette dernière inégalité sans utiliser la première question.*

Exercice 97. *Soit E un espace hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $H(f) = \{\frac{<f(x)|x>}{<x|x>} \mid x \neq 0\}$ (Hansdorffien de f). Montrer que $H(f)$ est compact convexe (pour la convexité, on se ramènera à montrer que $[0,1] \subset H(g)$ pour g bien choisi et on posera $g = u + iv$ avec u et v hermitiens). Calculer $H(f)$ si f est diagonalisable.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Tr(f) = 0$. Montrer que qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f n'a que des zéros sur la diagonale.

Semaine 12 : endomorphismes hermitiens

Exercice 98. *Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n. Montrer que, si $A \in \mathcal{A}_n$, $A + I_n$ et $A - I_n$ sont inversibles et $U = (A+I)(A-I)^{-1}$ orthgonale. Réciproquement, quelles sont les matrices orthogonales qui peuvent s'écrire sous cette forme ? En déduire que tout point de $SO_n(\mathbb{R})$ a un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.*

Exercice 99. *Soient A, B deux matrices réelles via une matrice unitaire U, montrer qu'elles sont semblables via une matrice orthogonale P. Montrer que, si $U \in SU_n(\mathbb{R})$, on ne peut pas forcément trouver $P \in SO_n(\mathbb{R})$ (regarder des matrices de rotation).*

Exercice 100. *Soient R, S, T trois matrices symétriques positives telles que RST est symétrique. Montrer que RST est aussi positive (commencer par le cas où T est définie positive).*

Exercice 101. *Soient A, B deux matrices symétriques positives. Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives dans une base orthonormale (commencer par le cas A définie positive).*

Probleme 15. *Soit $l \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$. On pose $\alpha = \inf_{M \in O_n(\mathbb{R})} l(M)$.*
- *Montrer que α est atteint.*
- *Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), l(M) = tr({}^tAM)$, pour une unique matrice A.*
- *Calculer α pour A diagonale...*
- *...puis quelconque (en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.*
- *Calculer α dans le cas particulier $l(M) = \sum 1 \leqslant i, j \leqslant n m_{i,j}$ (calculer $({}^tAA)^(-1)$ puis ses valeurs propres en les cherchant sous la forme $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$.*
- *Déterminer un équivalent de α quand $n \to \infty$.*

Semaine 13 : Formes quadratiques

Exercice 102.
- *Calculer le rang et le noyau de la forme quadratique $q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.*
- *Calculer le rang et le noyau de la forme quadratique $q(x, y, z) = 6x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 6yz$.*
- *Calculer le rang et la signature du déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}$.*
- *Montrer que la matrice de terme général $\frac{1}{i+j}$ est définie positive.*
- *Calculer le rang et la signature de la matrice de terme général $\cos(i + j)$.*
- *Calculer le rang et la signature de la forme quadratique $A \to tr(A^2)$ (resp. $tr({}^tAA)$ ou $tr(SA^tA$, où S est symétrique) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$.*

Exercice 103. *Calculer en fonction des réels a_i le rang et la signature de la forme quadratique $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2$.*

Exercice 104. *Soit φ une forme bilinéaire sur un espace euclidien telle que $\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow \varphi(y, x) = 0$. Montrer que φ est symétrique ou antisymétrique.*

Exercice 105. *Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f commute à tous les éléments de $O(q)$, c'est une homothétie.*

Exercice 106. *Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes symétriques tels que $\sum_{i=1}^p rg(u_i) = n$ et $\forall x \in E, \sum_{i=1}^p q_i(x) = x.x$ (où $q_i(x) = u_i(x).x$). Montrer que $E = \oplus Im(u_i)$, que cette somme directe est orthogonale et que les u_i sont des projecteurs orthogonaux.*

Exercice 107. *Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, F, F' deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ isométriques pour q (ie $\exists \sigma : F \to F'$ telle que $\forall x \in F', q(x) = q(\sigma(x))$. Montrer qu'il existe u dans $O(q)$ prolongeant σ.*

Exercice 108. *Soit E euclidien, u symétrique sur E et q sa forme quadratique associée, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, S la sphère unité de E et $\mathcal{F}_p$ l'esnsemble des sous-evde dimension p de E. Calculer $\sup_{A \in \mathcal{F}_p}(\inf_{x \in A \cap S} q(x))$. Si u' est la restriction de u à un hyperplan de e, que peut-on dire de ses valeurs propres ?*

Probleme 16. *On dit qu'un ev F est un SETI (sous-espace totalement isotrope) pour une forme bilinéaire φ si $\forall x, y \in F, \varphi(x, y) = 0$. On dit que c'est un SETIM (M pour maximal) si tout SETI qui le contient lui est égal.*
- *Montrer que, si F est un SETI, $dim(F) \leqslant n - \frac{rg(\varphi)}{2}$.*

- *Montrer que tout SETI est inclus dans un SETIM.*
- *Montrer que deux SETIM ont même dimension (qu'on appelle indice de la forme bilinéaire). (Indication : Si F_1 et F_2, noter F leur intersection, S_i un supplémentaire de F dans F_i et montrer que $S_1^{\perp} \cap S_2 = \{0\}$.)*
- *Que vaut l'indice d'une forme bilinéaire de signature (p,q) ?*

Probleme 17. *A une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$, on associe l'ellipsoïde $\mathcal{E}_q = \{x \in E \mid 0 \leqslant q(x) \leqslant 1$ et son volume $V_q = (Discr_{\mathcal{B}}(q) =^{\frac{-1}{2}}$ (où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale).*
- *Montrer que les formes définies positives forment un ouvert convexe dans l'ensemble des formes quadratiques.*
- *Montrer que $q \to V_q$ est une fonction strictement convexe.*
- *Soit K uncompact d'intérieur non vide. Montrer qu'il est contenu dans un unique ellipsoïde de volume minimal.*
- *Montrer que sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe d'un groupe orthogonal.*

Semaine 14 : Intégration 2, le retour

Exercice 109. *Etudier la convergence des intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}}dt$, $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \ln(\cos(\frac{1}{t}))dt$, $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t)}dt$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}}dt$, $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+t^{\alpha})}{t^{\beta}}$.*

Exercice 110. *Etudier la convergence de $\int_0^{\infty} |\sin(x)|^x \, dx$.*

Exercice 111. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante telle que $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $f(x) = o(\frac{1}{x})$.*

Exercice 112. *Soit f continue telle que $\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\forall a > 0, \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha}}$ converge.*

Exercice 113. *Calculer, pour $y \geqslant 0$, $\sup_{x \geqslant 0}(xy - \frac{x^p}{p})$. Montrer que, si f et g sont continues sur $[0,1]$, $\int_0^1 |fg| \leqslant (\int_0^1 |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_0^1 |g|^q)^{\frac{1}{q}}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (inégalité de Hölder).*

Exercice 114. *Etudier la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2(x)}$.*

Exercice 115. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ localement intégrable (ie intégrable sur tout intervalle) et de carré sommable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x})$.*

Exercice 116. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge. Montrer que, pour $a, b > 0$, $\int_0^{\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt$ converge et calculer cette intégrale. En déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$.*

Exercice 117. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrable et T-périodique et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt \int_a^b f(t)dt$. Redémontrer le cas particulier $lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$ (lemme de Lebesgue) dans le cas où f est $\mathcal{C}^1$ sans utiliser ce qui précède.*

Exercice 118. *Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence de $\int_0^{\infty} xe^{-x^{\alpha}\sin^2(x)}dx$?*

Exercice 119. *Soit $a > 0$. Trouver un équivalent quand $n \to \infty$ de $I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^a)\dots(n+x^a)}$.*

Exercice 120. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $I(t) = \int_0^1 e^{-atx^2}\varphi(x)dx$. Calculer un développement asymptotique de $I(t)$ quand $t \to \infty$.*

Exercice 121. *Une fonction $f : I \to I$ est dite Riemann-intégrable si $\sup(\int_I \varphi \mid \varphi \leqslant f, \varphi$ en escalier$) = \inf(\int_I \varphi \mid \varphi \geqslant f, \varphi$ en escalier $)$. Montrer que la fonction nulle sur les irrationels et valant $\frac{1}{q}$ en $\frac{p}{q}$ (p, q premiers entre eux) est Riemann-intégrable sur $[0,1]$. Montrer que si $f > 0$ sur I et Riemann-intégrable sur I, $\int_I f > 0$.*

Semaine 15 : Intégration 3, la vengeance

Exercice 122. *Calculer les limites quand $n \to \infty$ de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}$, $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}$, $\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $\int_0^1 \frac{(\sin(\frac{1}{x}))^n}{\sqrt{x}}$, $\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}(1+\frac{t}{\sqrt{n}})e^{-t\sqrt{n}}$, $\int_0^1(1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1}$.

Exercice 123. *Calculer* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ *en utilisant Fubini,* $\int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(2xy)dxdy$.

Exercice 124. *Calculer* $I_n = \int \dots \int_{D_n} x_1 \dots x_n dx_1 \dots dx_n$ *où* $D_n = \{x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 1\}$.

Exercice 125. *Calculer le volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 126. *Calculer un développement asymptotique en* $+\infty$ *de* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$.

Exercice 127. *Calculer un développement asymptotique en* $+\infty$ *de* $f(x) = \int_0^x e^{u^2}du$.

Exercice 128. *Trouver un équivalent en* 0^+ *de* $I(t) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x^3+1}}$.

Exercice 129. *Retrouver la formule de Stirling à partir de* $n! = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^n du$ *(on utilisera que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$*).*

Exercice 130. *Calculer* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *par Fubini, puis en utilisant la fonction* $g : x \to \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$, *et enfin en utilisant (et en montrant) l'encadrement* $(1-\frac{t^2}{n})^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant (1+\frac{t^2}{n})^{-n}$.

Exercice 131. *Etudier* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}dt$ *(définition, continuité, dérivabilité, limites et équivalents en* 0 *et* $+\infty$*).*

Exercice 132. *Donner un développement limité à l'ordre 2 de* $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1-t^n}dt$.

Exercice 133. *Calculer* $I_1(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\frac{e^{-t}}{t}dt$ *puis, pour* $\alpha > 0$, $I_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}t^{\alpha-1}dt$. *En déduire* $I_3(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ *puis* $I_4(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}e^{2i\pi xt}dt$.

Probleme 18. *Pour une fonction* f $\mathcal{L}^1$, *on pose* $\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}$ *(transformée de Fourier de* f*).*

- *Montrer que* $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{B} = \{$*fonctions continues bornées sur* $\mathbb{R}\}$.
- *Montrer que* $\mathcal{F}$ *est une application linéaire continue de* $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathcal{B}$.
- *Montrer que si* $tf(t)$ *est sommable,* $\mathcal{F}(f)$ *est dérivable, donner sa dérivée et généraliser aux dérivées d'ordre supérieur.*
- *Montrer que si* f *est* $\mathcal{C}^1$, *avec* f *et* f' *intégrables,* f *tend vers 0 à l'infini et calculer* $\mathcal{F}(f')$. *Généraliser.*
- *Calculer* $\mathcal{F}(f)$ *quand* f *est une fonction créneau* $f = \frac{1}{2a}$ *sur* $[-a, a]$, *et est nulle ailleurs) et quand* $f(x) = e^{-x^2}$.

Probleme 19. *(On se réfèrera à l'exercice précédent pour les notations). Si* f *et* g *sont deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on note* $f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$ *quand cela a un sens.*

- *Montrer que* $f*g$ *est bien définie quand* f *est à support compact, ou* f *intégrable et* g *bornée, ou encore* f *et* g *de carré sommable.*
- *Montrer que si* $f*g$ *existe,* $g*f$ *aussi et* $f*g = g*f$.
- *Montrer que* $*$ *est une forme bilinéaire continue sur* $\mathcal{B} \times \mathcal{L}^1$.
- *Montrer que si* $f \in \mathcal{L}^1$ *et* $g \in \mathcal{B}$, $f*g$ *est continue.*
- *On pose* $f(t) = e^{-t^2}$. *Caculer* $f*f$ *et* $f*exp$.
- *Quelles hypothèses mettre sur les fonctions pour avoir un résultat intéressant sur la dérivée de* $f*g$ *?*
- *Montrer que* $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

Semaine 16 : Séries de Fourier

Exercice 134. *Développer en série de Fourier* $f(x) = |\sin(x)|$ *(solution :* $\frac{8}{\pi}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$*),* $f(x) = x^2$ *sur* $[0, 2\pi]$*,* $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$ *sur* $[-\pi, \pi]$*.*

Exercice 135. *Montrer que* $\forall x \in [0, \pi]$*,* $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}$*.*

Exercice 136. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^2$*,* 2π*-périodique, de moyenne nulle et telle que* $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \geqslant |f''(t)|$*. Que peut-on dire de* f *?*

Exercice 137. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction de développement en série de Fourier* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$*. Montrer que* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h) - f(t-h)|^2\,dt = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\rho_n^2\sin^2(nh)$*, où* $\rho_n = (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)^{-\frac{1}{2}}$*. Si* f *est* α*-Hölderienne (*$|f(y) - f(x)| \leqslant |x-y|^{\alpha}$*), montrer qu'il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall p > 0$*,* $\sum_{i=1}^{+\infty}\rho_n^2\sin^2(\frac{n\pi}{2^{p+1}}) \leqslant \frac{M}{4^{p\alpha}}$ *puis que* f *est somme de sa série de Fourier si* $\alpha > \frac{1}{2}$*.*

Exercice 138. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$*. On pose* $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$*. Développer* f_α *en série de Fourier sur* $[0, 2\pi]$*. En déduire que* $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$*,* $cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$*. Montrer ensuite que* $\forall t \in [-\pi, \pi]$*,* $\sin(t) = t\Pi_{i=1}^{+\infty}1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}$ *et* $\forall t \in [-\pi, \pi]\backslash\{0\}$*,* $\frac{1}{sin^2 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t-n\pi)^2}$*.*

Exercice 139. *On pose,* $\forall p, q, r \in \mathbb{N}$*,* $a_{p,q} = \int_0^{\pi}\cos(qt)\sin((2p+1)\frac{t}{2})dt$*, et* $s_{r,p} = \sum_{i=1}^{r} a_{i,p}$*. Calculer* $a_{p,q}$*, montrer que* $s_{r,p} \geqslant 0$ *et* $s_{r,r} > \frac{\ln(r)}{2}$*. En déduire que la série de Fourier de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paire* 2π*-périodique valant* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin((2^{n^3+1})\frac{x}{2})$ *sur* $[0, \pi]$ *diverge en* 0*.*

Exercice 140. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*,* $\forall t \in]0, \pi[$*,* $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} = (\frac{\sin nt}{\sin t})^2$ *et que* $|\sin(x)| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$*. En déduire que* $\forall m \in \mathbb{N}^*$*,* $\int_0^{2\pi}\frac{|\sin mt|}{\sin t}dt = \frac{8}{\pi}\frac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2nm-1}}{\sum_{n=1}^{+\infty}4n^2-1}$*.*

Exercice 141. *Soit* f *la fonction* 2π*-périodique valant* -1 *sur* $[-\pi, 0]$ *et* 1 *sur* $[0, \pi]$*. Calculer sa série de Fourier. Etudier les extrema de sa série partielle, remarquer qu'ils ne convergent pas vers ce qu'on pourrait penser (phénomène de Gibbs).*

Exercice 142. *On pose, pour* $k \in \mathbb{N}$*,* $Q_k(t) = C_k(\frac{1+\cos t}{2})^k$ *(*C_k *constante telle que* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_k(t)dt = 1$*). Montrer que* $\forall \delta > 0$*,* $\lim_{n\to\infty}\sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}Q_k(t) = 0$*. En déduire que, si* f *est continue* 2π*-périodique,* $P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-s)Q_k(s)ds$ *converge uniformément vers* f*.*

Exercice 143. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *et* f *continue* 2π*-périodique. Que vaut* $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}f(2\pi n\alpha)$ *? En déduire que* $\{n\alpha - E(n\alpha)\}$ *est dense dans [0,1].*

Exercice 144. *On note* H_n *l'ensemble des polynômes trogonométriques de degré inférieur ou égal à* n*. Montrer qu'il existe* C *tel que* $\forall P \in H_n$*,* $\parallel P' \parallel_\infty \leqslant C \parallel P \parallel_\infty$ *(utiliser* $F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}(1 - \frac{|k|}{n})e^{ikx}$ *et* $I_n = P * F\sin(nx)$*). Montrer que, si* f *est* $\mathcal{C}^1$*,* $\inf_{P\in H_n}\parallel f - P \parallel_\infty = O(\frac{1}{n})$ *(utiliser* $J_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}(\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})})^4$ *et commencer parmontrer que* $\alpha_n\ C''n^3$*).*

Semaine 17 : Séries entières

Exercice 145. *Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n+5}{(n+2)(n+3)}x^n$*,* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{(n+2)(n+1)}$*.*

Exercice 146. *Développer en série entière (au voisinage de* 0*)* $z \mapsto \frac{1}{1+z+z^2+z^3+z^4}$*,* $z \mapsto \frac{e^z}{1-z}$*,* $x \mapsto (x + \sqrt{1+x^2})^\alpha$*,* $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$*.*

Exercice 147. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles vérifiant les relations* $u_{n+1} = u_n + 2v_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n$. *Calculer le rayon de convergence et la somme de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \frac{t^n}{n!}$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \frac{t^n}{n!}$.

Exercice 148. *Soit* f *une fonction développable en série entière au voisinage de* 0 *et vérifiant* $f(0) = 1$. $\frac{1}{f}$ *est-elle développable en série entière au voisinage de* 0 *?*

Exercice 149. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+k} + \lambda_1 a_{n+k-1} + \ldots + \lambda_k a_n$. *Montrer que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *a un rayon de convergence strictement positif et que sa somme est une fraction rationnelle. Etudier la réciproque.*

Exercice 150. *On note* I_n *le nombre d'involutions sans point fixe de* $\{1, \ldots, n\}$ *(c'est-à-dire de* σ *dans* $\mathfrak{S}_n$ *telles que* $\sigma^2 = Id$*). Trouver une relation de récurrence entre les* I_n *puis calculer* $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n \frac{z^n}{n!}$

Exercice 151. *Etudier la série entière* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{E(\sqrt{n})} \frac{z^n}{n}$ *(en particulier sur le disque de convergence).*

Exercice 152. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes et* $A_n = a_0 + \ldots + a_n$. *Montrer que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{z^n}{n!}$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \frac{z^n}{n!}$ *ont même rayon de convergence. Montrer que, si le rayon de convergence de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *vaut* 1, *celui de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n z^n$ *aussi. Donner un contre-exemple s'il ne vaut pas* 1.

Exercice 153. *Pour* $x \geqslant 0$, *on note* $q(x) = \{a \in \mathbb{Z}^2 \mid \| a \| \leqslant x\}$ *et* $q^+(x) = \{a \in \mathbb{N}^2 \mid \| a \| \leqslant x\}$. *Trouver des équivalents de* q *et* q^+ *quand* $x \to \infty$. *On pose* $g(t) = \frac{1}{1-t}(\sum_{n\in\mathbb{N}} t^{n^2})^2$. *Trouver un équivalent de* g *en* 1^-, *et donc de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^{n^2}$.

Exercice 154. *Soit* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ *telle que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *diverge et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ *a rayon de convergence* 1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\frac{a_n}{b_n} \to S$. *Montrer que* $\lim_{1^-} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n}{\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n} = S$. *En déduire* $\lim_{t\to 1^-} (1-t)^\alpha \sum_{n\geqslant 1} n^{\alpha-1} t^n$. *Trouver un équivalent en* 1^- *de* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

Exercice 155. *Calculer, pour* $|z| \neq 1$, $\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{iu}}{e^{iu}-z} du$. *En déduire que, si* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est dérivable au sens complexe en* 0, *de dérivée continue, elle est développable en série entière au voisinage de* 0 *(introduire* $g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(e^{iu}-z))-f(z)}{e^{iu}-z} ie^{iu} du$*). Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit dérivable au sens complexe en un point.*

Semaine 18 : Equations différentielles linéaires

Exercice 156. *Résoudre les équations différentielles suivantes :* $y'+y = \sin(t)$, $(1+t^2)y' = ty+1+t^2$, $(1+t^2)y' + ty = 0$, $y'' + 2y' + y = te^t$, $y'' + y = \tan^2(t)$, $t^2y'' - 2y = 3t^2$, $x^2y'' + xy' + y = x^3$.

Exercice 157. *Résoudre l'équation différentielle* $(t^2 - 1)y'' - 6y = 0$.

Exercice 158. *Résoudre l'équation différentielle* $xy'' + 2y' + \omega^2 xy = 0$

Exercice 159. *Résoudre le système d'équations différentielles*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} 2x'' & + & 3y'' & + & 2x' & + & y' & + & x & + & y & = & 0 \\ x'' & + & 3y'' & + & 4x' & + & 2x' & - & x & - & y & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 160. *Trouver les fonctions* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *telles que* $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = f(\frac{1}{t})$.

Exercice 161. *Considérons le système* $Y' = A(t)Y$, $A : \mathbb{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *continue* T*-périodique. Montrer qu'il existe une solution non nulle* V *telle que* $\forall t \in \mathbb{R}$, $V(t+T) = \lambda V(t)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Exercice 162. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $f' - \alpha f \to 0$ en $+\infty$. Montrer que $f \to 0$ en $+\infty$. Généraliser en trouvant une condition nécessaire et suffisante sur un polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ pour que $P(D)(f) \to 0$ en $+\infty$ implique $f \to 0$ en $+\infty$.*

Exercice 163. *Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} |q(x)| < \infty$ et y une solution bornée de $y''+q(x)y = 0$. Etudier le comportement de y' en $+\infty$. Montrer qu'il y a des solutions non bornées (utiliser le Wronskien).*

Exercice 164. *Soient x et y des solutions respectives des équations $x''+p(t)x = 0$ et $y''+q(t)y = 0$. On suppose $p \geqslant q$ sur un intervalle I. Montrer qu'entre deux zéros de x dans I, il y a toujours un zéro de y. En déduire des résultats sur les zéros de x quand p est majorée ou minorée sur I. En déduire des résultats sur les zéros d'une solution de l'équation $x'' + \frac{x'}{t} + (1 - \frac{\alpha^2}{t^2})x = 0$. Montrer qu'une solution de l'équation $y'' + ty = 0$ s'annule au moins 15 fois sur l'intervalle $[-25, 25]$.*

Semaine 19 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 165. *Montrer que $P(x, y) = x^2y^4 + y^2x^4 - 3x^2y^2 + 1$ est positif sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas somme de carrés de polynômes.*

Exercice 166. *La fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ a-t-elle des extrema locaux ?*

Exercice 167. *Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ se prolonge à $\mathbb{R}_+^2$ et déterminer ses bornes.*

Exercice 168. *Soit $K = [0, 1]^2$. On définit f sur K par $f(x) = x(1 - y)$ quand $x \leqslant y$ et $f(x) = y(1 - x)$ quand $x > y$. Etudier la différentiabilité de f sur $\overset{\circ}{K}$ et ses bornes.*

Exercice 169. *Soit d une distance sur un espace de Banach E et U un ouvert de E. Montrer que d ne peut pas être différentiable partout sur U^2.*

Exercice 170. *Calculer la différentielle de l'inversion sur $GL_n(\mathbb{R})$ puis sur $(L)_c(E)$, où E est un espace de Banach de dimension infinie.*

Exercice 171. *Calculer les extrema (relatifs et absolus) de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.*

Exercice 172. *Etudier la différentiabilité de la norme sup sur l'ensemble des suites réelles à limite nulle.*

Exercice 173. *Soit $U \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que c'est un ouvert dans l'ensemble des matrices symétriques, que l'application racine carrées est bien définie sur U et que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur U.*

Exercice 174. *Déterminer les fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que, si $< u, v >= 0$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$ (Indication : commencer en dimension 2).*

Exercice 175. *On note $C_0 = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}$, muni de la norme $\| u \|= \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Etudier la différentiabilité de cette norme.*

Exercice 176. *On note $S = \{z \in \mathbb{C} \mid\| z \|= 1\}$. Comment placer trois points A, B, C sur S pour que le périmètre du triangle ABC soit maximal ?*

Exercice 177. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Calculer le Laplacien en coordonnées sphériques, puis montrer que $\int\int_{D(0,R)} f(x, y)dxdy = \pi R^2 f(0, 0)$ (où $D(0, R)$ est le disque de centre 0 et de rayon R). En déduire que si f est de plus bornée, elle est constante.*

Exercice 178. *Démontrer le théorème d'inversion locale (si $f : E \to F$, avec E et F des espaces de Banach, a une différentielle bicontinue en un point x de F, il existe des voisinages V de x et W de $f(x)$ tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de v sur W et $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$).*

Exercice 179. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = df(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}} x_i x_j g_{i,j}(x)$, où les $g_{i,j}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que si la matrice des dérivées secondes de f est d'efinie positive en 0, f s'écrit localement au voisinage de l'origine comme somme de n carrés de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (lemme de Morse).*

Semaine 20 : Calcul différentiel et intégral

Exercice 180. *Calculer les extrema locaux de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$.*

Exercice 181. *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2_+ \backslash (0, 0)$ par $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ se prolonge à $\mathbb{R}^2_+$ et calculer ses bornes.*

Exercice 182. *Montrer que les courbes d'équations $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$ et $r = a \sin(2\theta)$ (en coordonnées polaires) ont même longueur.*

Exercice 183. *Calculer $\int\int\int_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.*

Exercice 184. *Calculer $\int_E y^2 dx + x^2 dy$, où E est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} = 0$. Le long de quels cercles cette même intégrale est-elle nulle ?*

Exercice 185. *Montrer que $f(x, y) = x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 + 1 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 186. *Etudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.*

Exercice 187. *Calculer $\int\int_D \sqrt{xy}dxdy$, où $D = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ (\frac{x}{2} + \frac{y}{4})^2 \leqslant \frac{x}{6}$.*

Exercice 188. *On pose, pour $t \geqslant 0$, $F(t) = \int\int_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)}dxdy$ et $f(t) = \int_0^t e^{ix^2}dx$. Exprimer $F(t)$ de deux manières, monter que $\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$ converge quand $T \to +\infty$ et en déduire la valeur de $\phi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$.*

Exercice 189. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \Pi_{i=1}^n x_i$. Calculer $\sup_\Gamma f$, où $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = s\}$. Calculer de même $\sup_\Gamma \sum_{i=1}^n x_i^2$, où $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}$. Montrer que, si $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, $\Pi_{i=1}^n x_i(1 - x_i) \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.*

Exercice 190. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$ de différentielle inversible en tout point et telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} \| f(x) \| = \infty$. Montrer que f est propre (l'image réciproque d'un compact est compacte) puis qu'elle est surjective, puis que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini, enfin que $|f^{-1}(\{y\})|$ est constant (s'il vaut 1, f est donc un difféomorphisme).*

Probleme 20. *Soit ω une forme différentielle sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to V$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On définit $\phi^*\omega(x)(h) = \omega(\phi(x))(d\phi(x)(h))$. Montrer que c'est une forme différentielle, exacte si ω est exacte et $\mathcal{C}^n$ si ω est $\mathcal{C}^n$ et ϕ $\mathcal{C}^{n+1}$.*
Soit $A_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur E a pour base $l_i \wedge l_j : (x, y) \mapsto l_i(x)l_j(y) - l_j(x)l_i(y)$, où $(l_1, \dots l_n)$ est une base de $E*$ quand $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On définit une forme différentielle de degré 2 comme $\sum_{(i,j)} a_{i,j} dx_i dx^j$, et la différentielle d'une forme différentielle $\omega = \sum_i a_i dx_i$ par $d\omega = \sum_i da_i \wedge dx_i$ (qui est une forme différentielle de degré 2). Montrer que ça ne dépend pas de la base choisie, montrer que $d(df) = 0$ pour une fonction $\mathcal{C}^2$, définir un changement de variables et vérifier ses propriétés (montrer en particulier que $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$. Généraliser tout celà à des différentielles de degré supérieur.

Semaine 21 : Equations différentielles, arcs paramétrés

Exercice 191. *Résoudre l'équation différentielle* $y' + y + xy^2 = 0$.

Exercice 192. *Résoudre l'équation différentielle* $y^2 + 3y'' = 0$.

Exercice 193. *Résoudre l'équation différentielle* $y' + y^2 + xy + 1 = 0$.

Exercice 194. *Résoudre l'équation différentielle* $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Exercice 195. *Résoudre l'équation différentielle* $y = ty' - \frac{(y')^2}{4}$.

Exercice 196. *Trouver les solutions maximales de l'équation différentielle* $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 197. *On considère l'équation différentielle* $y''y = 1$. *Trouver des transformations simples du plan laissant stable l'ensemble des courbes solutions. Résoudre l'équation, dessiner les solutions, donner le nombre de solutions* f *vérifiant* $f(0) = f(1) = 1$.

Exercice 198. *On note* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(t,x) = 0$ *si* $t = 0$, $2t$ *si* $x < 0$, $2t - frac4xt$ *si* $x \in [0, t^2]$, *et* $-2t$ *si* $x \in [t^2, +\infty[$. *Montrer que* f *est continue, mais que, si on pose* $(E) : x' = f(t,x)$, $x_0 = 0$ *et* $x_n(t) = \int_0^t f(u, x_{n-1}(u))du$, x_n *ne converge pas vers une solution de* E, *et que même ses valeurs d'adhérence ne sont pas solutions de* E. *Résoudre* E.

Exercice 199. *Une mémé se déplace à vitesse constante* v *sur l'axe* O_y *en partant du point* $(0,0)$ *au temps* $t = 0$. *Son toutou part du point* $(a,0)$ $(a > 0)$, *va à la vitesse constante* $2v$ *et se dirige constamment vers la mémé. Quand la rejoint-il ?*

Exercice 200. *Soit* (E) : $t^2y'' + (a+1)ty' + (t^2 + \frac{1}{4})y = 0$ $(a \geqslant 1)$. *Montrer que* E *a une solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de la forme* $t^\alpha \phi(t)$ *où* ϕ *est somme d'une série entière de rayon de convergence infini sur* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que* $\phi(0) \neq 0$. *Si* $a^2 - 1$ *n'est pas un carré d'entier, étudier le comportement asymptotique en* 0^+ *de la solution générale de* E. *En déduire qu'il existe une unique solution de l'équation* $t^4y^4 - \frac{2}{3}t^3y' + (1 + \frac{t^2}{4}) = 0$ *équivalente à* $t^{\frac{1}{6}}$ *en* $+\infty$ *et en donner un développement asymptotique à trois termes.*

Probleme 21. *On considère le système différentiel suivant :*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & & ax & - & bxy \\ y' & = & - & cx & + & dxy \end{array} \right.$$

- *Intérpréter ce système si* x *est le nombre de sardines dans l'océan et* y *le nombre de requins.*
- *Montrer que* $H(x,y) = by + ax - a\ln(y) - c\ln(x)$ *est une intégrale première du mouvement* $(\frac{dH}{dt} = 0)$.
- *Montrer qu'une solution partant de* $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *est périodique.*
- *Calculer les valeurs moyennes de* x *et de* y.
- *Si on rajoute un terme de pêche (c'est-à-dire un* $-\epsilon x$ *dans la première équation et un* $-\epsilon y$ *dans la seconde), qui cela favorise-t-il ?*

Probleme 22. *On considère l'équation différentielle* (E) : $y' = y^2 - x$.

- *Déterminer les zones de croissance et de convexité des solutions.*
- *Montrer que, par tout point du plan, il passe une solution maximale définie sur un intervalle non minoré.*
- *Montrer, que si* y *est une solution maximale majorée sur un intervalle non majorée, elle est croissante puis décroissante et a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$.

– *On note y_t la solution passant par le point $(0,t)$. Montrer que, si $u < t$, $y_u < y_t$ sur l'intersection de leurs domaines de définition.*
– *Montrer que $A = \{t \mid y_t$ est majorée $\}$ est de la forme $]-\infty, \alpha[$.*
– *Montrer que $B = \{t \mid y_t$ est croissante et convexe à l'infini $\}$ est de la forme $]\beta, +\infty[$.*
– *Montrer que $\alpha = \beta$.*

Exercice 201. *On note C la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho = a(1+\cos(\theta))$. Montrer que, pour une direction δ donnée, il y a trois tangentes à C suivant δ. Calculer le lieu de l'isobarycentre des trois points ainsi déterminer, et l'aire du triangle qu'ils délimitent. Calculer l'aire entouré par la cardioïde C.*

Exercice 202. *On note C la courbe définie par les équations paramétriques $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ et $z(t) = t^4$. Calculer l'équation du plan osculateur en un point de C. Montrer qu'il y a exactement un autre point d'intersection $P(t)$ dudit plan avec la courbe (sauf si $t = 0$, auquel cas, on note $P(0) = (0,0,0)$). Montrer que, si $C(t_1), \dots, C(t_4)$ sont coplanaires, $P(t_1), \dots, P(t_4)$ aussi. Calculer l'équation du plan contenant les $P(t_i)$ en fonction de celle de celui contenant les $C(t_i)$.*

Semaine 22 : Algèbre générale et géométrie

Exercice 203. *Calculer les intégrales suivantes : $\int\int_D x^2 dxdy$ où $D = \{(x,y) \mid x^2 \leqslant x \leqslant y\}$; $\int\int_D (x^2-y^2)e^{xy}dxdy$ où $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1;\ x+y \geqslant 1;\ x \geqslant y\}$; $\int\int_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ où $D = \{(x,y) \mid x \geqslant y \geqslant 0;\ x^3+y^2 \leqslant \pi$; $\int\int\int_D xyzdxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$; $\int\int\int_{[-1,1]^3}(x^2+y^2+z^2)e^z dxdydz$.*

Exercice 204. *Calculer $\int\int_D (x+y)dxdy$ où $D = \{(x,y) \mid y^2 \leqslant x+2;\ x^2 \leqslant y+2$.*

Exercice 205. *Tracer la courbe paramétrée définie par les équations cartésiennes $x(t) = \frac{t+1}{t(t-1)(t+2)}$ et $y(t) = \frac{1}{t^2-1}$.*

Exercice 206. *Tracer les courbes C : $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ et C' : $r = a\sin(2\theta)$ et montrer qu'elles ont même longueur.*

Exercice 207. *Soit ABC un triangle non aplati. Montrer que les paraboles tangentes aux trois droites (AB), (BC) et (CA) sont celles ayant pour foyer un point F du cercle circonscrit à ABC (distinct de A, B et C) et pout directrice la droite de Steiner du point F par rapport à ABC.*

Exercice 208. *L'inversion de contre $O \in \mathbb{R}^2$ et de rapport $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, notée $I(O,k)$ est l'application $\mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ qui, à un point M, associe le point M' de la droite (OM) vérifiant $OM.OM' = k$. Montrer que I est involutive, trouver ses points fixes, que devient la distance entre deux points après inversion ? Montrer que I est un difféomorphisme et calculer sa différentielle, en déduire qu'elle conserve les angles. Calculer les images des droites et des cercles du plan par I.*

Exercice 209. *Quelques petits exercices sur les groupes ou l'arithmétique : montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $5 \mid (2^{3n+5}+3^{n+1})$. Quel est le reste de la division par 7 de $16^{2^{1000}}$? Quel est la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444} ? Combien y a-t-il de morphismes $\mathcal{S}_n \to \mathbb{C}^*$? Montrer qu'un groupe fini G tel que $\forall x \in G$, $x^2 = e$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Montrer que -1 et un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier) si et seulement $p \equiv 1[4]$, en déduire l'existence d'une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.*

Exercice 210. *Montrer que le groupe $\mathcal{A}_4$ n'est pas simple, c'est-à-dire a un sous-groupe distingué non trivial. Montrer qu'au contraire $\mathcal{A}_5$ est simple, et même que $\forall n \geqslant 5$, $\mathcal{A}_n$ est simple.*

Exercice 211. *Montrer que* $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. *Montrer que, si* $n = \Pi_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, *on a* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \Pi_{i=1}^r (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times$.
Montrer que, si p *est un nombre premier différent de* 2, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists q \in \mathbb{N}^*$ *premier à* p *tel que* $(1+p)^{p^k} = 1 + qp^{k+1}$, *en déduire l'ordre de* $p+1$ *dans* $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ *puis que* $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)p^\alpha\mathbb{Z}$. *Montrer que, so* $k \geqslant 3$, $5^{2^k} = 1 + \lambda 2^{k+2}$, *où* λ *est impair, en déduire que* $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2^{\alpha-2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Conclure.*

Exercice 212. *Soit* $a \in \mathbb{N}$. *Un entier* n *est dit ppa (pseudo-premier en base* a*) s'il n'est pas premier mais vérifie* $a^{n-1} \equiv 1[n]$. *Montrer que, si* p *est un entier premier impair et* $p \nmid a(a^2-1)$, $n = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$ *est ppa. En déduire qu'il y a une infinité de nombres ppa.*
Un entier n *est appelé nombre de Carmichael s'il est ppa pour tous les entiers* a *qui lui sont premiers. Montrer que* n *est de Carmichael* $\Leftrightarrow n = p_1 \dots p_r$ *(*p_i *nombres premiers distincts) avec* $\forall i,\ p_i - 1 \mid n-1$. *Montrer qu'un nombre de Carmichael ne peut avoir moins de trois facteurs premiers.*

Probleme 23. *Le but du problème est de trouver toutes les solutions entières de l'équation* $x^2+7 = 2^n$ *(équation de Ramanujan-Nagell).*
- *Résoudre dans le cas où* n *est pair.*
- *Si* n *est impair, en posant* $m = n-2$, *montrer que* x *est impair et se ramener à* $\frac{x^2+7}{4} = 2^m$.
- *Décomposer* 2 *en facteurs premiers dans l'anneau* $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$.
- *En posant* $z = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$, *montrer que* $z^m - \bar{z}^m = \epsilon\sqrt{-7}$, *où* $\epsilon \in \{-1, 1\}$.
- *En regardant modulo* $\bar{z}^2$, *résoudre le cas* $\epsilon = 1$.
- *Si* $\epsilon = -1$, *montrer que* $m \equiv 3, 5$ *ou* $13[42]$.
- *Montrer qu'on ne peut avoir de solutions pour deux valeurs distinctes de* m *ayant même congruence modulo* 42. *Terminer la résolution.*

Probleme 24. *On notera par la suite* $\pi(n)$ *le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à* n.
- *Montrer que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant C_{2n}^n \leqslant 4^n$.
- *Montrer que* $P_n = \Pi_{p \text{ premier} \leqslant n} p \leqslant 4^n$.
- *Montrer que* $v_p(n!) = \sum_{i=1}^\infty \left[\frac{n}{p^i}\right]$.
- *Si* $r \in \mathbb{N}^*$, *montrer que* $p^r \mid C_{2n}^n \Rightarrow p^r \leqslant 2n$. *En déduire* $C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$.
- *Si* $n > 2$, *montrer que* $2\frac{n}{3} < p \leqslant n \Rightarrow p \nmid C_{2n}^n$.
- *On pose* $R_n = \Pi_{n < p \text{ premier} \leqslant 2n} p$. *Montrer que, si* $n \geqslant 98$, $\frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\frac{\sqrt{n}}{2}}} \leqslant R_n \leqslant (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)}$.
- *Montrer que* $x \geqslant 7 \Rightarrow 2^x \geqslant 18x$ *et* $x \geqslant 5 \Rightarrow 2^x \geqslant 6x$. *En déduire que, si* $n \geqslant 450$, $R_n > 2n$.
- *Conclure que,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *il existe deux nombres premiers entre* n *et* $2n$ *(théorème de Tchebychev).*