Interrogation Écrite n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 novembre 2026

Énoncé :

1. équation différentielle : équation dont l'inconnue est une fonction y, faisant intervenir les dérivées de cette fonction.
   linéaire : pas d'autre opération que des sommes ou des produits des dérivées par des fonctions.
   homogène : pas de « terme constant » en plus des termes dépendant de y.
   du premier ordre : seule la dérivée première y' apparaît dans l'équation.
   Un exemple : $xy' + x^2y = 0$.
2. On va évidemment effectuer une IPP en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-2x}$ qu'on intègre en $-\frac{1}{2}e^{-2x}$, pour obtenir $I_1 = \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.
3. Ici, le calcul est direct puisqu'on reconnaît à un facteur près une forme $u'e^u$: $I_2 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$.
4. Là, il va y avoir un peu plus de travail puisqu'il faut faire une décomposition en éléments simples. Le dénominateur $x(x^2+4x+3)$ a un deuxième facteur de discriminant $\Delta = 16-12 = 4$ et de racines $x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$, on peut donc le factoriser sous la forme $x(x+1)(x+3)$. On en déduit, via décomposition en éléments simples, l'existence de trois réels a, b et c tels que $\frac{2x+1}{x^3+4x^2+3x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+3}$. En multipliant par x avant d'évaluer pour $x = 0$, on trouve $a = \frac{1}{3}$. De même, en multipliant par $x+1$ puis en évaluant en -1, on aura $b = \frac{-1}{-1\times 2} = \frac{1}{2}$. Enfin, en multipliant par $x = 3$ avant d'évaluer en -3, on trouve $c = \frac{-5}{-3\times(-2)} = -\frac{5}{6}$. Il ne reste donc plus qu'à calculer $I_3 = \int_1^2 \frac{1}{3x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{6(x+3)}\,dx = \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{5}{6}\ln(x+3)\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{5}{6}\ln(5) + \frac{5}{6}\ln(4) = \frac{3}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{5}{6}\ln(5)$.