Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

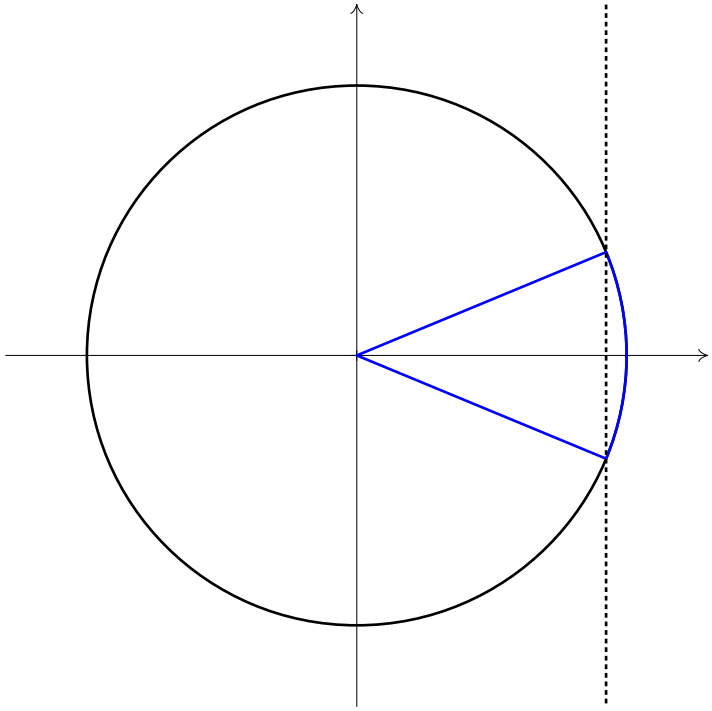
MPSI Lycée Camille Jullian

7 novembre 2026

Exercice 1

1. Puisque $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, on peut écrire $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$, donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on en déduit directement que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
2. (a) On applique par exemple deux fois de suite la formule de duplication déjà exploitée à la question précédente : $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1))^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.
   (b) Si on remplace x par $\frac{\pi}{8}$, on aura $\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $0 = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1$. Notre cosinus est donc solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
   (c) On commence par poser $X = x^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $8X^2 - 8X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 64 - 32 = 32$, et pour racines $X_1 = \frac{8-4\sqrt{2}}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, et $X_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Les deux racines obtenues étant positives, l'équation du quatrième degré initiale a quatre solutions : $x_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $x_2 = -x_1$, $x_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $x_4 = -x_3$. On peut déjà éliminer les deux solutions négatives qui ne peuvent pas être égales à $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, reste donc à choisir entre x_1 et x_3. Or, comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$, on a nécessairement $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) < \cos^2(0)$, soit $\frac{1}{2} < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) < 1$. Or, de façon assez évidente, on a $X_1 < \frac{1}{2} < X_2$ puisque $2 - \sqrt{2} < 2 < 2 + \sqrt{2}$. La seule valeur cohérente est donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{X_2} = x_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
3. On peut utiliser une autre formule de duplication du cosinus pour obtenir $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, puis $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (puisque la valeur recherchée est à nouveau positive). En faisant le quotient, on en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
4. On calcule donc $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, puis $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, et enfin $\tan\left(\frac{67\pi}{8}\right) = \tan\left(8\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$.

5. En divisant par 2 des deux côtés, on constate que l'inéquation est équivalente à $\cos(x) > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Sur le cercle trigonométrique, on constate que cette inégalité est vérifiée quand x est « compris entre $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$ modulo 2π ». Comme on ne peut pas utiliser la notation habituelle des congruences pour des intervalles, la façon théoriquement correcte d'écrire l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{8} + 2k\pi, \frac{\pi}{8} + 2k\pi\right[$.



6. (a) Quitte à nouveau à tout diviser par 2, cette expression peut s'écrire sous la forme $2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(3x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(3x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)$ (formule d'addition des cosinus).

   (b) En simplifiant par 2, on cherche donc à résoudre $\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. Deux possibilités : soit $3x + \frac{\pi}{8} \equiv 2x + \frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $x \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$; soit $3x + \frac{\pi}{8} \equiv -2x - \frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $5x \equiv -\frac{5\pi}{8}[2\pi]$ puis $x \equiv -\frac{\pi}{8}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$.

Exercice 2

1. (a) C'est une décomposition en éléments simples très classique : $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$, donc $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$, avec a et b deux constantes réelles qu'on peut calculer via les méthodes habituelles. En multipliant par $1-t$ avant d'évaluer pour $t = 1$, on trouve $\frac{1}{1+1} = a$, soit $a = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $1+t$ puis en évaluant pour $t = -1$, on obtient $b = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$. Finalement, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}[-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(3)$.

   (b) On repart de la même décomposition en éléments simples, mais dans une intégrale « sans

bornes » : $\displaystyle\int^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}(-\ln(1-x)+\ln(1+x)) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$. L'expression obtenue est bien définie sur l'intervalle $]-1,1[$, sur lequel le quotient à l'intérieur de la racine carrée est toujours strictement positif.

(c) On part directement de l'équation $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = y$, on passe l'exponentielle puis au carré pour obtenir $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = e^y$, puis $\frac{1+x}{1-x} = e^{2y}$. Autrement dit, $1+x = e^{2y} - xe^{2y}$, ou encore $x(1+e^{2y}) = e^{2y}-1$, ce qui donne comme unique solution de l'équation $x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$, qui est donc l'expression de la réciproque recherchée. Quitte à multiplier en haut et en bas par e^{-y}, on peut constater que $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \mathrm{th}(y)$, donc notre réciproque est en fait la fonction tangente hyperbolique.

2. Un calcul trivial pour commencer gentiment : $I_0(x) = \displaystyle\int_0^x 1\,dt = x$.

3. Commençons par écrire $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,dt = \int_0^x \frac{2}{e^t+e^{-t}}\,dt$. On peut effectivement poser $u = e^t$, ou encore $t = \ln(u)$. Les bornes de notre intégrale deviendront $e^0 = 1$ et e^x, et on aura par ailleurs $dt = \frac{1}{u}\,du$, donc $I_1(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2}{u+\frac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\,du = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\,du = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - 2\arctan(1) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$ comme anoncé.

4. On pose donc brutalement $f(x) = 2\arctan(e^x) - \arcsin(\mathrm{th}(x))$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{th}(x)$ est toujours compris dans l'intervalle $]-1,1[$ sur lequel arcsin est définie. Elle y est même dérivable, ce qui permet d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, $f'(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} - \frac{\mathrm{th}'(x)}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}}$. Or, on sait que $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$, donc $\frac{\mathrm{th}'(x)}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} = \frac{1-\mathrm{th}^2(x)}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} = \sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ (tout est bien positif). On ne s'arrête pas en si bon chemin : $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ en multipliant numérateur et dénominateur par e^x, ce qui permet de conclure que la dérivée de f est tout simplement nulle. La fonction f est donc constante. Comme $f(0) = 2\arctan(1) - \arcsin(0) = 2 \times \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}$, la conclusion s'impose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, $2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} = \arcsin(\mathrm{th}(x))$, donc $I_1(x) = \arcsin(\mathrm{th}(x))$.

5. On vient de rappeler à la question précédente que $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est une des expressions de la dérivée de th, donc $I_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\,dt = [\mathrm{th}(t)]_0^x = \mathrm{th}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

6. On peut par exemple partir de I_n et écrire le quotient sous la forme proposée, puis effectuer une IPP en posant $u(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^{n+1}(t)}$, donc $u'(t) = -\frac{(n+1)\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)}$, et $v'(t) = \mathrm{ch}(t)$ qui admet pour primitive $v(t) = \mathrm{sh}(t)$. On obtient alors $I_n(x) = \left[\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{n+1}(t)}\right]_0^x + (n+1)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)}\,dt$. Or, on connaît tous la formule $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$, qui permet de remplacer le numérateur $\mathrm{sh}^2(t)$ de l'intégrale obtenue par $\mathrm{ch}^2(t) - 1$. Autrement dit, $I_n(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1}(x)} + (n+1)\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2(t)-1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)}\,dt = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{n+1}(x)} + (n+1)I_n(x) - (n+1)I_{n+2}(x)$. On peut écrire cette relation autrement : $(n+$

1)$I_{n+2}(x) = \dfrac{\text{th}(x)}{\text{ch}^n(x)} + (n+1-1)I_n(x)$, donc $I_{n+2}(x) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\text{th}(x)}{\text{ch}^n(x)} + \dfrac{n}{n+1}I_n(x)$, comme demandé.

7. (a) Ça, c'est facile : $\text{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \geqslant \dfrac{e^t}{2} > 0$, donc $\dfrac{1}{\text{ch}(t)} \leqslant \dfrac{2}{e^t} = 2e^{-t}$.

   (b) On déduit de la question précédente que $\dfrac{1}{\text{ch}^n(t)} \leqslant 2^n e^{-nt}$, donc $I_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x 2^n e^{-nt}\, dt = \left[\frac{2^n e^{-nt}}{-n}\right]_0^x = -\frac{2^n}{n}e^{-nx} + \frac{2^n}{n} \leqslant \frac{2^n}{n}$.

8. (a) On calcule simplement $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\arctan(e^x) = 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$, donc $a_1 = \pi$. De même, $a_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$.

   (b) Si on fait tendre x vers $+\infty$ dans la relation de la question 6, il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\text{th}(x)}{\text{ch}^n(x)} = 0$ (c'est assez évident, le numérateur est toujours inférieur à 1, et le dénominateur tend violemment vers $+\infty$) pour obtenir exactement la relation souhaitée.

   (c) La relation précédente peut s'écrire $(n+1)a_{n+2} = na_n$, donc $(n+1)a_{n+1}a_{n+2} = na_n a_{n+1}$, ce qui revient exactement à dire que la suite $(na_n a_{n+1})$ est constante (deux termes successifs de la suite sont toujours égaux). En particulier, on aura $a_3 = \dfrac{1}{2}a_1 = \dfrac{\pi}{2}$, et $a_4 = \dfrac{2}{3}a_2 = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3

1. (a) La fonction f n'est pas définie, et donc pas dérivable, en 0. Par contre, sur $]-\infty, 0[$ comme sur $]0, +\infty[$, on peut calculer $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

   (b) La fonction f est donc constante sur chacun de ses deux intervalles de définition, mais les deux constantes n'ont aucune raison d'être égales. D'ailleurs, $f(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, mais $\forall x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

   (c) On calcule donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \dfrac{1}{\tan(\arctan(x))} = \dfrac{1}{x}$. Or, avec l'hypothèse $x > 0$, on sait que $\arctan(x) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$ appartient aussi à ce même intervalle, et $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ également puisque $\dfrac{1}{x} > 0$. Deux angles appartenant à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et qui ont la même tangente étant nécessairement égaux, on peut en déduire que $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. (a) Ce n'était pas demandé à cette question, mais signalons que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, la seule valeur problématique étant celle qui annule le dénominateur dans la première arctangente. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+x}{1-x} = -1$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \arctan(-1) - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{3\pi}{4}$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

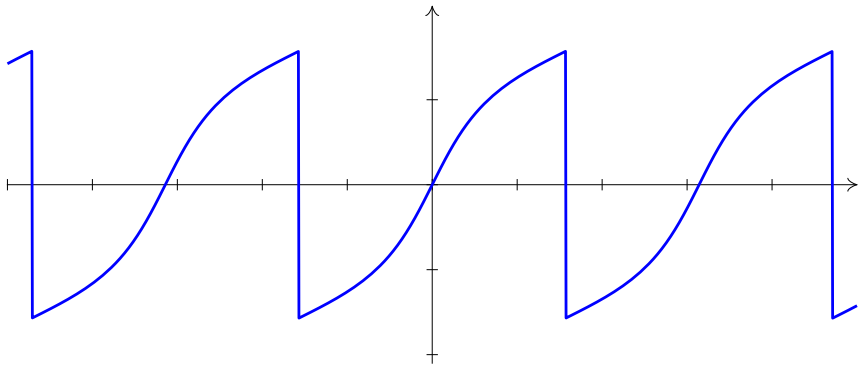
   (b) On va une fois de plus calculer bêtement la dérivée de la fonction. Notons $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et constatons que u est dérivable sur $\mathcal{D}_g$, avec $u'(x) = \dfrac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, donc g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et $g'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} -$

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. La fonction g est donc constante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et ces constantes sont nécessairement égales aux valeurs des limites calculées plus haut. Plus précisément, $\forall x < 1$, $g(x) = \frac{\pi}{4}$, et $\forall x > 1$, $g(x) = -\frac{3\pi}{4}$.

3. (a) On a vu quasiment la même intégrale en TD récemment. On fait une IPP en posant $u(x) = \arctan(x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et $v'(x) = x^2$ qu'on peut intégrer en $v(x) = \frac{x^3}{3}$. On obtient $I_1 = \left[\frac{x^3}{3}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{6}[\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln(2)$.

   (b) On va bien sûr effectuer une IPP similaire : $u(x) = \arctan(x)$ donc $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $v'(x) = x^3$ donc $v(x) = \frac{x^4}{4}$, pour obtenir $I_2 = \left[\frac{x^4}{4}\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$. On constate que $\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^4+x^2-x^2-1+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$, ou alternativement que $\frac{x^4-1+1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$, et on peut continuer le calcul : $I_2 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 1\,dx - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}[\arctan(x)]_0^1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Curieusement, le résultat de ce deuxième calcul est nettement plus simple que celui du précédent.

4. La fonction h a le même domaine de définition que la fonction tangente (autrement dit, on a pour valeurs interdites tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$), et elle est π-périodique et impaire comme la fonction tangente (la multiplication par 2 et la composition par arctangente n'ont aucune raison de modifier ces propriétés). On peut donc l'étudier sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et compléter par imparité pour obtenir une période complète. Sur cet intervalle, la fonction tan est strictement croissante, donc h également (on compose deux fonctions strictement croissantes). De plus, $h(0) = 0$ (de toute façon, h est impaire) et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ (puisque ce qui est dans l'arctangente va tendre vers $+\infty$). On a donc une fonction simplement strictement croissante sur chaque période, mais avec des limites finies et non infinies comme une bête tangente. La courbe ressemble à quelque chose comme ça (mon logiciel indique des sections verticales qui n'ont pas de raison d'être, il n'y a d'ailleurs techniquement pas d'asymptotes verticales sur cette courbe) :



Problème (tiré d'un vieux sujet de Petites Mines)

A. Un calcul d'intégrales.

1. $I(a,0) = \displaystyle\int_0^1 t^a \, dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$.
2. Plutôt qu'un dessin, si on veut être rigoureux, on effectue le changement de variable $x = 1-t$ (donc $t = 1-x$). On aura alors $dx = -\,dt$, et les bornes vont devenir 1 et 0. Autrement dit, le changement de bornes et le changement de signe de l'élément différentiel s'annulent pour donner $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^a x^b \, dx = I(b,a)$. Si on tient à faire une explication graphique, il faut faire apparaitre une symétrie par rapport à $\dfrac{1}{2}$ pour expliquer l'égalité des aires.
3. On part par exemple de $I(a,b+1) = \displaystyle\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1} \, dt$ et on effectue une IPP en posant $u(t) = (1-t)^{b+1}$, donc $u'(t) = -(b+1)(1-t)^b$, et $v'(t) = t^a$ qu'on peut intégrer en $v(t) = \dfrac{t^{a+1}}{a+1}$. On obtient alors $I(a,b+1) = \left[\dfrac{t^{a+1}(1-t)^{b+1}}{a+1}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{b+1}{a+1} t^{a+1}(1-t)^b \, dt = \frac{b+1}{a+1} I(a+1,b)$ puisque le crochet s'annule. Si on veut écrire la relation dans l'autre sens, $I(a+1,b) = \dfrac{a+1}{b+1} I(a,b+1)$.
4. On applique la relation précédente avec $a = 0$ et $b = n$: $I(1,n) = \dfrac{1}{n+1} I(0,n+1) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ en reprenant le calcul de la première question.

   Pour la formule générale, le plus simple est de procéder par récurrence : au rang 0, d'après la question 1, $I(a,0) = \dfrac{1}{a+1}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée (le numérateur vaut $0! = 1$ et le dénominateur ne contient que le facteur $a+1$). Si on suppose la formule vraie au rang n, alors d'après la question 4, on a $I(a,n+1) = \dfrac{n+1}{a+1} I(a+1,n)$. Or, si on applique l'hypothèse de réccurence avec $a+1$ au lieu de a, on a la formule $I(a+1,n) = \dfrac{n!}{(a+2)(a+3)\dots(a+n+2)}$. Multiplier ce quotient par $\dfrac{n+1}{a+1}$ va transformer le numérateur en $(n+1)\times n! = (n+1)!$, et ajouter au dénominateur le facteur $a+1$ qui manque à gauche pour obtenir $(a+1)(a+2)\dots(a+n+2)$. On a exactement obtenu la formule demandée pour $I(a,n+1)$, ce qui achève la récurrence.
5. Si p est un entier, on peut écrire le dénominateur comme un quotient de factorielles : $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)\dots(p+q+1)} = \dfrac{1\times 2\times\dots\times p}{1\times\dots\times p\times(p+1)\dots(p+q+1)} = \dfrac{p!}{(p+q+1)!}$. On en déduit que $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

B. Étude d'une famille de fonctions.

1. Il faut avoir $\dfrac{a}{x} < 1$ pour que f soit définie. C'est le cas pour $x > a$, mais aussi lorsque $x < 0$, donc $\mathcal{D}_{f_a} =]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[$.
2. On peut invoquer des arguments de convexité, mais le plus simple est de procéder à des études de fonction. Posons $g(x) = \ln(x) - \ln(x-a) - \dfrac{a}{x}$, définie et dérivable sur $]a,+\infty[$. On calcule $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{x(x-a) - x^2 + a(x-a)}{x^2(x-a)} = \dfrac{-a^2}{x^2(x-a)} < 0$. La fonction g est

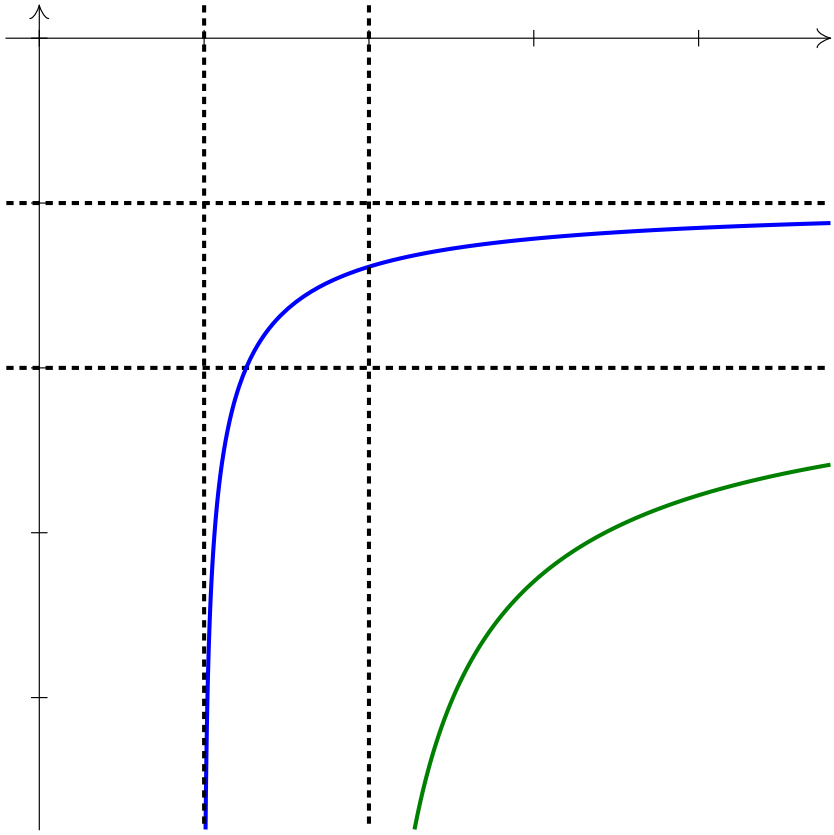
donc décroissante. Or, $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-a}\right) - \frac{a}{x}$, forme qui permet de prouver facilement que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. La fonction g est donc toujours strictement positive, ce qui prouve la première inégalité demandée.

De même on pose $h(x) = \ln(x) - \ln(x-a) - \frac{a}{x-a}$. La fonction h est définie et dérivable sur $]a, +\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} + \frac{a}{(x-a)^2} = \frac{(x-a)^2 - x(x-a) + ax}{x(x-a)^2} = \frac{a^2}{x(x-a)^2}$. Cette fois-ci la fonction est strictement croissante, et un calcul quasiment identique à celui effectué pour g prouve que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, donc la fonction h est négative, ce qui prouve la deuxième inégalité demandée.

3. Dérivons f_a sur l'intervalle $]a, +\infty[$: $f_a'(x) = \ln\left(\frac{x-a}{x}\right) + x \times \frac{a}{x^2} \times \frac{1}{1-\frac{a}{x}} = \ln(x-a) - \ln(x) + \frac{a}{x-a} = -h(x)$. On vient de prouver que h était une fonction négative, donc f_a' est positive et f_a est strictement croissante sur $]a, +\infty[$. On calcule sans grande difficulté $\lim_{x\to a} f_a(x) = -\infty$ (ce qui est dans le ln a une limite nulle). Par contre, la limite en $+\infty$ est nettement moins évidente. En posant $X = -\frac{a}{x}$, on aura $\lim_{x\to+\infty} X = 0$, et $f_a(x) = -\frac{a}{X}\ln(1+X)$. Or, une limite de taux d'accroissement classique vue en cours stipule que $\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -a$. On peut résumer tout cela dans le tableau de variations suivant :

x	a	$+\infty$
f_a	$-\infty$ ↗	$-a$

4. Pas grand chose de passionnant à tracer, $\mathcal{C}_1$ est en bleu et $\mathcal{C}_2$ en vert :



5. On constate que $\ln(u_n) = n\ln\left(1-\dfrac{a}{n}\right) = f_a(n)$. Les calculs des questions précédentes prouvent donc que la suite (u_n) est croissante et que $\lim \ln(u_n) = -a$, donc $\lim u_n = e^{-a}$.

C. Vers la définition de la fonction Γ.

1. Calculons $F_n(1) = \displaystyle\int_0^n t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,dt$ en effectuant une IPP avec $u(t)=t$, donc $u'(t)=1$, et $v'(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ qui a pour primitive $v(t) = -\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n+1}$. On en déduit que $F_n(1) = \left[-\dfrac{n}{n+1}t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n + \dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\,dt = \frac{n}{n+1}\left[-\frac{n}{n+2}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+2}\right]_0^n$ (le crochet précédent étant nul en 0 comme en n). Finalement, $F_n(1) = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(1) = 1$.

2. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t}{n}$, ou $t = nu$, dans l'intégrale définissant F_n. Les bornes deviennent donc 0 et 1, et on a $dt = n\,du$, donc $F_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n (nu)^x \times n\,dx = n^{x+1}\int_0^1 u^x(1-u)^n\,dx = n^{x+1}I(x,n)$. Remarquons en passant que, si on avait démontré cette formule avant de répondre à la question 1, on se serait beaucoup moins fatigués puisqu'on a déjà calculé $I(1,n)$ dans la première partie de ce problème (en tout cas, les deux calculs effectués sont cohérents).

3. On a prouvé en partie B que $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n+1}\right)^{n+1}$. Le produit par t^x ne va pas

modifier le sens de cette inégalité, et l'intégration non plus, ce qui prouve que $F_n(x) \leqslant F_{n+1}(x)$, et donc que la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est bien croissante.

4. À l'aide des questions précédentes (de cette partie mais aussi de la première), on calcule $F_n(x+1) = n^{x+2}I(x+1,n) = n^{x+2} \times \dfrac{x+1}{n+1} I(x,n+1) = \dfrac{n^{x+2}(x+1)}{n+1} \times \dfrac{F_{n+1}(x)}{(n+1)^{x+1}} = (x+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{x+2} F_{n+1}(x)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{x+2} = 1$ (la puissance est fixe et le quotient a pour limite 1), donc un passage à la limite de la relation précédente donne $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x+1) = (x+1) \times \lim\limits_{n\to+\infty} F_{n+1}(x)$, ce qui implique bien $F(x+1) = (x+1)F(x)$.

5. On a vu plus haut que $F(1) = 1$, donc la formule de la question précédente permet de calculer $F(2) = 2F(1) = 2$, puis $F(3) = 3F(2) = 6$ et ainsi de suite. On conjecture facilement que $F(k) = k!$, ce qui se démontre facilement par récurrence (c'est vrai au rang $k = 1$, et si $F(k) = k!$, alors $F(k+1) = (k+1) \times F(k) = (k+1) \times k! = (k+1)!$).