Devoir Surveillé n° 3

MPSI Lycée Camille Jullian

7 novembre 2026

Ce sujet est définitivement trop long pour être entièrement traité en quatre heures, vous pouvez donc considérer que la dernière partie du problème (au moins) est une sorte de bonus facultatif, et ne pas (trop) vous inquiéter si vous avez l'impression d'avoir laissé beaucoup de questions en cours de route.

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'effectuer quelques calculs de trigonométrie autour de l'angle $\frac{\pi}{8}$. Les deux premières questions de l'exercice permettent de calculer la même valeur et doivent être traitées de façon complètement indépendante.

1. En exploitant une formule de duplication, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ à partir de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. (a) Pour tout réel x, exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) En déduire une équation de degré 4 vérifiée par $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   (c) Résoudre cette équation, et retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en justifiant soigneusement le choix de la solution.
3. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On mettra cette dernière valeur sous la forme la plus simple possible (normalement, une seule racine carrée et des nombres entiers doivent intervenir dans la formule obtenue).
4. Donner (en justifiant) les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{67\pi}{8}\right)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}}$ (on pourra illustrer les résultats obtenus sur un cercle trigonométrique).
6. (a) Simplifier l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x)$.
   (b) En déduire les solutions réelles de l'équation $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier quelques intégrales en lien avec les fonctions hyperboliques. On notera en particulier, pour tout entier naturel, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}\,dt$ (autrement dit, I_n est la primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}^n}$ s'annulant en 0). La première question de l'exercice est indépendante des questions suivantes.

1. (a) Calculer à l'aide d'une décomposition en éléments simples l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt$.
   (b) Déterminer de la même façon la primitive sur l'intervalle $]-1,1[$ s'annulant en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

(c) Déterminer la bijection réciproque de la primitive obtenue à la question précédente (on ne demande pas de montrer au prélable que la fonction est bijective). Quelle fonction reconnaissez-vous ?

2. Calculer la valeur de $I_0(x)$.
3. À l'aide du changement de variable $u = e^t$, montrer que $I_1(x) = 2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$.
4. En exploitant un calcul de dérivée, montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\arctan(e^x) - \arcsin(\text{th}(x)) = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire une autre expression possible de $I_1(x)$.
5. Calculer $I_2(x)$ (un calcul direct est ici possible si on connaît son cours).
6. En remarquant que $\dfrac{1}{\text{ch}^n(t)} = \dfrac{\text{ch}(t)}{\text{ch}^{n+1}(t)}$, effectuer une intégration par parties permettant de démontrer que $I_{n+2}(x) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\text{th}(x)}{\text{ch}^n(x)} + \dfrac{n}{n+1}I_n(x)$.
7. (a) Montrer que, si t est un réel positif, $\dfrac{1}{\text{ch}(t)} \leqslant 2e^{-t}$.

   (b) En déduire que, si $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geqslant 1$, $I_n(x) \leqslant \dfrac{2^n}{n}$.
8. On admet que les fonctions I_n admettent des limites en $+\infty$ pour $n \geqslant 1$ (cela découle de la croissance de ces fonctions et de la majoration calculée à la question précédente), et on note $a_n = \lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\text{ch}^n(t)}\, dt$.

   (a) À l'aide des calculs effectués en début d'exercice, donner les valeurs de a_1 et a_2.

   (b) Montrer en exploitant la relation de la question 6 que $a_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}a_n$.

   (c) Montrer enfin que la valeur de na_na_{n+1} est indépendante de n lorsque $n \geqslant 1$. En déduire les valeurs de a_3 et de a_4.

Exercice 3

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres, et font toutes intervenir la fonction arctangente.

1. On pose pour cette première question $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   (a) Calculer la dérivée de la fonction f sur les intervalles où cela a un sens.

   (b) Conclure rigoureusement sur une expression simplifiée de la fonction f.

   (c) Retrouver le résultat obtenu à la question précédente pour $x > 0$ en calculant $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)$ (on fera à nouveau attention à conclure rigoureusement).
2. On pose dans cette deuxième question $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$.

   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   (b) Montrer que g est constante sur les intervalles où elle est définie, et préciser les valeurs de ces constantes.
3. (a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan(x)\, dx$ (on pourra constater en cours de route que $\dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x^3+x}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}$).

   (b) Calculer par le même genre de technique l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x^3 \arctan(x)\, dx$.

4. Effectuer une étude rapide (domaine de définition, détermination d'un intervalle d'étude, limites et variations sur une période, et une allure plausible de courbe) de la fonction $h : x \mapsto \arctan(2\tan(x))$. Interdiction de faire des calculs compliqués pour cette question, ils ne sont pas du tout nécessaires.

Problème (tiré d'un vieux sujet de Petites Mines)

Les deux premières parties du problème sont indépendantes, mais toutes les deux utiles pour la dernière partie.

A. Un calcul d'intégrales.

On note dans cette partie $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^a(1-t)^b\ dt$, où a et b sont deux réels positifs.
On rappelle que la factorielle d'un entier n est le produit $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

1. Calculer la valeur de $I(a,0)$ pour tout réel positif a.
2. Montrer que $I(a,b) = I(b,a)$ (un dessin clair peut suffire).
3. Déterminer une relation entre $I(a+1,b)$ et $I(a,b+1)$.
4. Déduire des questions précédentes que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I(1,n) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
   Généraliser pour démontrer la formule suivante : $I(a,n) = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)}$.
5. Si p et q sont deux entiers naturels quelconques, exprimer $I(p,q)$ à l'aide de factorielles.

B. Étude d'une famille de fonctions.

Pour tout réel strictement positif a, on note $f_a(x) = x\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)$. On notera $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de la fonction f_a sur l'intervalle $]a,+\infty[$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f_a ?
2. Montrer que, si $0 < a < x$, alors $\dfrac{a}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-a) \leqslant \dfrac{a}{x-a}$.
3. En déduire les variations de f_a sur l'intervalle $]a,+\infty[$, puis dresser un tableau de variations complet de f_a sur ce même intervalle.
4. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
5. La valeur de a étant fixée, on définit une suite (u_n) par $u_n = \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n$ pour $n > a$. Préciser la monotonie et la limite éventuelle de la suite (u_n).

C. Vers la définition de la fonction Γ.

Pour tout réel positif x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^x\ dt$.

1. Calculer $F_n(1)$ pour tout entier n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1}I(x,n)$.
3. En utilisant les résultats de la partie B, montrer que la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est toujours croissante. On **admet** que cette suite est également majorée, et converge donc. On note alors, pour tout réel positif, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x+1) = (x+1)F(x)$.
5. En déduire la valeur de $F(k)$ pour tout entier naturel k.