

Devoir Surveillé n° 2 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

3 octobre 2026

Exercice 1

1. On s'empresse bien sûr d'effectuer le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du troisième degré $X^3 + 4X^2 + X - 6 = 0$. Cette équation a pour racine évidente $X = 1$ puisque $1 + 4 + 1 - 6 = 0$. On peut donc factoriser son membre de gauche sous la forme $X^3 + 4X^2 + X - 6 = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. Une petite identification des coefficients donne $a = 1$, $b - a = 4$ donc $b = 5$, et $c - b = 1$ donc $c = 6$ (la condition sur le coefficient constant est bien cohérente). Reste à trouver les racines du facteur $X^2 + 5X + 6$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et pour racines $X_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$. Pas de chance, ces deux solutions sont incompatibles avec le changement de variables effectué, qui impose $X > 0$. On ne garde donc que la possibilité $X = 1$, soit $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
2. On va résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[-3, +\infty[$ pour que la racine carrée du membre de gauche soit définie. Sur $[-3, 3]$, inutile de résoudre quoi que ce soit : sur cet intervalle, $x - 3 \leq 0$, donc l'inégalité est toujours vraie. Sur $[3, +\infty[$, tout étant positif, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $x + 3 \geq x^2 - 6x + 9$, soit $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 49 - 24 = 25$ et admet pour racines $x_1 = \frac{7-5}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{7+5}{2} = 6$. Le trinôme est négatif entre ses racines, mais comme on est en train de résoudre sur $[3, +\infty[$, on garde l'intervalle $[3, 6]$. Finalement, $\mathcal{S} = [-3, 6]$.
3. Le plus prudent est de distinguer tout de suite deux cas. Si $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$, et on pose $X = \ln(x)$ pour se ramener à l'inéquation $X^2 + 2X - 3 > 0$. Le membre de gauche a pour racine évidente 1, et sa deuxième racine est -3 (le produit de ces racines étant égal à -3). Le trinôme est positif à l'extérieur des racines, donc pour $X > 1$, soit $x > e$, ou $X < -3$, qui donne des valeurs de x incompatibles avec l'hypothèse $\ln(x) \geq 0$. On conserve donc un premier intervalle de solutions : $]e, +\infty[$. Deuxième cas, celui où $x \in]0, 1]$, et donc $\ln(x) \leq 0$. On pose malgré tout $X = \ln(x)$, ce qui nous amène cette fois à résoudre $X^2 - 2X - 3 > 0$. Cette fois-ci, -1 est racine évidente, et 3 est la deuxième racine. Le trinôme est donc positif si $X < -1$, soit $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, ou si $X > 3$, ce qui donne des valeurs de x incompatibles avec notre hypothèse. Finalement, $\mathcal{S} = \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup]e, +\infty[$.
4. Pour montrer la majoration, calculons $\frac{1}{3} - \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} = \frac{m^2 + mn + n^2 - 3mn}{3(m^2 + mn + n^2)} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{3(m^2 + mn + n^2)} = \frac{(m - n)^2}{3(m^2 + mn + n^2)} \geq 0$, ce qui prouve bien que tous les éléments de A sont plus petits que $\frac{1}{3}$, qui en est donc un majorant. En fait, c'est même le maximum de A , puisqu'on obtient $\frac{1}{3}$ en posant par exemple $m = n = 42$. Bien sûr, ce maximum coïncide

avec la borne supérieure de A . Par ailleurs, A est trivialement minoré par 0, donc admet une borne inférieure. En fixant $m = 1$ et en laissant n varier dans $\mathbb{N}^*$, on constate que tous les nombres de la forme $\frac{n}{1+n+n^2}$ appartiennent à l'ensemble A . Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n+n^2} = 0$, ce qui prouve que la borne inférieure recherchée est égale à 0. En fait, $\frac{n}{1+n+n^2} < \frac{1}{n}$, ce qui permet de prouver facilement qu'aucun nombre strictement positif ne peut minorer l'ensemble A . Par contre, A n'admet pas de minimum, car la valeur 0 n'appartient pas à A .

5. On va prouver tout d'un seul coup en cherchant les antécédents par f d'un élément de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire d'un couple de réels (a, b) . On doit pour cela trouver deux réels x et y vérifiant $4x - 3y = a$ et $2x + y = b$. En fait, il s'agit de résoudre un petit système de deux équations à deux inconnues. Ici, on peut par exemple multiplier la deuxième équation par 3 et l'ajouter à la première pour obtenir $4x - 3y + 6x + 3y = a + 3b$, donc $x = \frac{1}{10}a + \frac{3}{10}b$. Ensuite, on en déduit que $y = b - 2x = -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$. On a trouvé un antécédent unique pour chaque couple, ce qui prouve que f est bijective, et les formules obtenues pour les coordonnées de cet antécédent montrent que $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \mapsto \left(\frac{1}{10}a + \frac{3}{10}b, -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \right) \end{cases}$.

Exercice 2

- Si on pose $g_1(x) = x$, on a en effet $g_1(xg_1(x) + g_1(y)) = g_1(x^2 + y) = x^2 + y = y + (g_1(x))^2$, donc la fonction g_1 est solution du problème. De même, si $g_2(x) = -x$, alors $g_2(xg_2(x) + g_2(y)) = g_2(-x^2 - y) = x^2 + y = y + (g_2(x))^2$, donc g_2 est aussi solution du problème.
- Si on applique l'équation avec $x = 0$ (et en gardant y quelconque), on a bien $f(f(y)) = y + f(0)^2$.
- Supposons que deux réels y et y' aient la même image par f , alors $f(f(y)) = f(f(y'))$, donc, en exploitant l'égalité obtenue à la question précédente, $y + f(0)^2 = y' + f(0)^2$, dont on déduit $y = y'$, ce qui prouve l'injectivité de f .
- Soit z un réel quelconque, et posons $y = z - f(0)^2$. La relation obtenue question 2 montre que $f(f(y)) = z$, donc $f(y)$ est un antécédent de z par f , ce qui prouve en particulier que f est surjective.
- On vient de prouver lors des deux dernières questions que f était une application bijective, 0 admet donc un unique antécédent par f . Or, c'est exactement ce qu'on nous demande de prouver à cette question.
- Appliquons donc la relation de départ avec $x = x_0$, pour obtenir $f(x_0 \times 0 + f(y)) = y + f(x_0)^2$, soit $f(f(y)) = y$.
- Le résultat de la question 2 appliqué à $y = x_0$ montre que $f(0) = x_0 + f(0)^2$. Or, la question précédente vient de prouver que $f(0) = x_0$ (en appliquant toujours avec $y = x_0$). On en déduit que $x_0 = x_0 + f(0)^2$, donc $f(0)^2 = 0$, puis $f(0) = 0$. La fonction f étant bijective, $x_0 = 0$ puisqu'ils ont la même image par f .
- Dans la relation initiale, on pose $x = f(t)$ et $y = 0$, pour obtenir $f(f(t)f(f(t))) = (f(f(t)))^2$ (en utilisant bien sûr que $f(0) = 0$). Or, $f(f(t)) = t$, donc $f(tf(t)) = t^2$. On peut remplacer t par $f(t)$ dans cette relation (c'est un réel comme un autre) pour en déduire que $f(f(t)f(f(t))) = (f(t))^2$, donc $f(tf(t)) = (f(t))^2$ en exploitant une fois de plus le résultat de la question 6. La comparaison des deux formules obtenues permet de conclure immédiatement que $(f(t))^2 = t^2$, et donc que $f(t) = t$ ou $f(t) = -t$ (deux réels ayant le même carré sont égaux ou opposés). Mais on a démontré cette égalité indépendamment pour chaque réel t , et rien ne prouve qu'il n'y a pas des réels pour lesquels $f(t) = t$ et d'autres pour lesquels $f(t) = -t$. On n'a donc pas encore prouvé que g_1 et g_2 étaient les seules solutions du problème à ce stade.

9. On remplace simplement x par 1 dans la relation de départ et, comme $f(1) = 1$, on a $f(1 \times 1 + f(y)) = y + 1^2$, soit $f(1 + f(y)) = 1 + y$. On peut élever au carré cette équation et exploiter la question 8 pour en déduire que $(f(1 + f(y)))^2 = (1 + f(y))^2 = (1 + y)^2$. En développant tout, on a donc $1 + 2f(y) + (f(y))^2 = 1 + 2y + y^2$. En exploitant une deuxième fois le fait que $(f(y))^2 = y^2$, on en déduit que $1 + 2f(y) + y^2 = 1 + 2y + y^2$, donc découle immédiatement $f(y) = y$. Cette égalité étant valable pour tout réel, on a cette fois-ci bien prouvé que $f = g_1$.
10. Même méthode : on pose $x = -1$ dans la relation de départ et on trouve $f(-1 + f(y)) = y + (-1)^2 = y + 1$, puis on élève au carré pour obtenir $(-1 + f(y))^2 = (1 + y)^2$, et en développant $1 - 2f(y) + y^2 = 1 + 2y + y^2$, donc on déduit cette fois que $f(y) = -y$, et donc que $f = g_2$.
11. Une solution du problème vérifie $(f(1))^2 = 1$, donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -2$. On vient de prouver que les deux seules fonctions convenables avec ces hypothèses étaient g_1 et g_2 . Comme ces dernières sont par ailleurs bien solutions de l'équation initiale, celle-ci admet exactement deux solutions qui sont g_1 et g_2 .

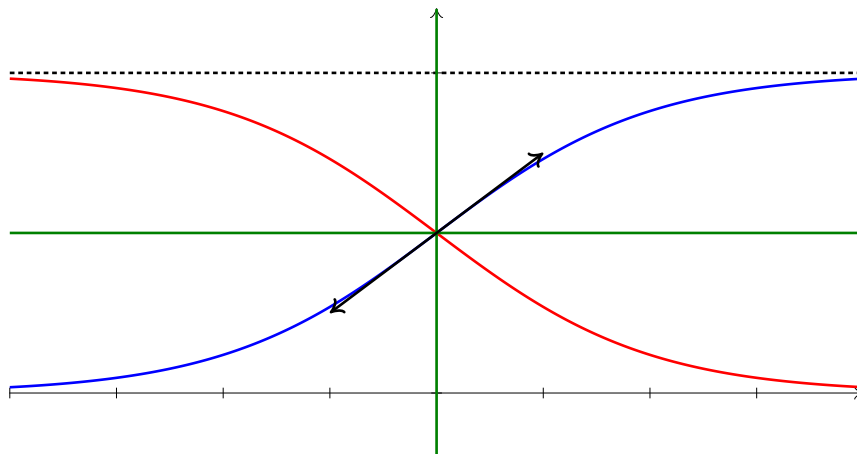
Exercice 3

A. Étude des fonctions f_0 et f_1 .

1. Explicitons les expressions des deux fonctions : $f_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, et $f_1(x) = \frac{e^x}{e^x(1 + e^x)} = \frac{1}{1 + e^x}$. Sans aucune difficulté (pas de forme indéterminée), on calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$. La seule limite nécessitant une explication est donc la dernière, pour laquelle on peut écrire $f_0(x) = \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$ afin d'obtenir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$.
2. La fonction f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_0(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$. Cette dérivée est manifestement strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve la croissance stricte de la fonction f_0 .
3. (a) D'après les calculs précédents, $f'_0(0) = \frac{1}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{4}$, et $f_0(0) = \frac{1}{2}$, donc notre tangente a pour équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
 (b) Calculons $y - f_0(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{x(1 + e^x) + 2(1 + e^x) - 4e^x}{4(1 + e^x)} = \frac{x + xe^x + 2 - 2e^x}{4(1 + e^x)} = -\frac{g(x)}{4(1 + e^x)}$, qui est du signe opposé à celui de $g(x)$.
 (c) La fonction est dérivable autant de fois qu'on le souhaite, et $g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x - 1 = e^x - xe^x - 1$, puis $g''(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$. Autrement dit, g'' est du signe de $-x$. Ceci prouve que g' est croissante sur $] -\infty, 0]$ puis décroissante sur $[0, +\infty[$, admettant donc pour maximum $g'(0) = 2 - 1 - 0 - 1 = 0$. La fonction g' est donc toujours négative, et g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or, $g(0) = 2 - 0 - 2 - 0 = 0$, donc g est elle-même positive sur $] -\infty, 0]$ puis négative sur $[0, +\infty[$.
 (d) Puisque $y - f_0(x)$ est du signe opposé à celui de g , la courbe de f_0 est au-dessus de sa tangente sur $\mathbb{R}^-$, puis en-dessous de sa tangente sur $\mathbb{R}^+$.
4. En effet, $f_1(-x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x + 1)} = \frac{1}{e^x + 1} = f_0(x)$, et $1 - f_0(x) = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x} = f_1(x)$. La première égalité montre que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (même principe que pour les fonctions paires), la deuxième

montre qu'elles sont symétriques par rapport à la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$ (à abscisse fixée, on a $f_0(x) + f_1(x) = 1$, ce qui montre que les deux points ont une ordonnée moyenne égale à $\frac{1}{2}$).

5. La courbe $\mathcal{C}_0$ est tracée en bleu, $\mathcal{C}_1$ en rouge, et la tangente en noir. On a bien sûr indiqué également l'asymptote horizontale commune aux deux courbes (mais pas du même côté), et les axes de symétrie en vert :



B. Des calculs d'intégrales.

- Le quotient définissant f_0 est de la forme $\frac{u'}{u}$, donc $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
- On a déjà signalé plus haut que $f_0(x) + f_1(x) = 1$, donc par linéarité de l'intégrale, $u_0 + u_1 = \int_0^1 1 dx = 1$. On en déduit évidemment que $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ (non, on ne cherchera pas à écrire cette valeur plus simplement).
- En mettant au même dénominateur, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} - \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} = \frac{e^x - e^{2x}}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} = \frac{e^x(1-e^x)}{e^{(n+1)x}(1+e^x)}$. Ce quotient est du signe de $1-e^x$, donc négatif sur $[0, 1]$. Cela prouve que la courbe $\mathcal{C}_n$ est en-dessous de celle de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur cet intervalle, et donc que $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme par ailleurs $u_n \geq 0$ (on intègre des fonctions qui prennent toujours des valeurs positives entre 0 et 1), la suite converge donc (théorème de convergence monotone).
- C'est un calcul similaire à celui de la question 2 : $\int_0^1 f_n(x) + f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^{(n+1)x}(1+e^x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^{nx}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n}$. On en déduit que $u_1 + u_2 = \frac{1-e^{-1}}{1} = 1 - \frac{1}{e}$, donc $u_2 = 1 - \frac{1}{e} - u_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{1}{e}$.
- On a une expression explicite pour $2v_n$ qui tend manifestement vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Or, la suite (u_n) étant décroissante, on a toujours $u_{n+1} \leq u_n$, donc $v_n \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$.

Mais on peut aussi écrire pour la même raison que $u_n \leq \frac{u_n + u_{n-1}}{2} = v_{n-1}$. On en déduit l'encadrement $v_n \leq u_n \leq v_{n-1}$ qui permet de conclure via le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

- Puisqu'on a pris soin d'entourer ce qui se trouve dans le $\ln$ d'une valeur absolue, les seuls points qui peuvent poser problème sont ceux pour lesquels $x^2 - 1 = 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Les seuls endroits où la dérivabilité pourrait poser problème à cause de l'annulation de la valeur absolue sont justement -1 et 1 , donc f est bel et bien dérivable partout où elle est définie.
- Commençons par le plus facile : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^2 - 1| = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(|x^2 - 1|) = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (ce qui se trouve dans l'exponentielle tendant vers $-\infty$ après produit par $x + 1$). Pas vraiment de difficulté non plus du côté de 1 : $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(|x^2 - 1|) = -\infty$, qu'on multiplie par un facteur tendant vers 2 avant de prendre l'exponentielle, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, ce qui confirme la possibilité de prolonger la fonction par continuité en 1 . On a un problème plus important en -1 dans la mesure où le facteur $x + 1$ a une limite nulle, ce qui crée une forme indéterminée. Le plus simple est d'écrire $(x + 1) \ln(|x^2 - 1|) = (x + 1) \ln(|x - 1| \times |x + 1|) = (x + 1) \ln(|x - 1|) + (x + 1) \ln(|x + 1|)$. Le premier terme de cette somme a désormais une limite nulle (puisque $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(|x - 1|) = \ln(2)$), et $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \ln(|x + 1|) = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln(|X|) = 0$ par croissance comparée (après avoir posé $X = x + 1$ pour se ramener à une forme plus évidente). Finalement, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$ (on n'oublie pas l'exponentielle autour de tout ce dont on vient de calculer la limite!), on peut là aussi prolonger par continuité.
- (a) C'est en fait assez évident : si u est positive, on sait que la dérivée de $\ln(u)$ a pour forme $\frac{u'}{u}$, mais si u est négative, alors $\ln(|u|) = \ln(-u)$ a pour dérivée $\frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$.
 (b) On va donc pouvoir exceptionnellement dériver nos valeurs absolues sans distinguer de cas tant qu'elles restent sous des $\ln$. Ici, si on pose $h(x) = (x + 1) \ln(|x^2 - 1|)$, on a donc $h'(x) = \ln(|x^2 - 1|) + (x + 1) \times \frac{2x}{x^2 - 1} = g(x)$. La composition par une fonction exponentielle strictement croissante ne modifiant pas les variations de la fonction, f' est bien du même signe que g .
- On dérive à nouveau (comme pour la précédente, il est sous-entendu qu'on calcule la dérivée sur $\mathcal{D}_f$ à chaque fois, ce qui ne pose aucun problème) : $g'(x) = \frac{2(x - 1) - 2x}{(x - 1)^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - 2(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x + 1)(x - 1)^2}$. Cette dérivée a donc un numérateur du signe (après factorisation par 2) de $x^2 - 2x - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$ et pour racines $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Ces valeurs d'annulation de g devraient sembler très rassurantes si on a fait l'effort de lire la suite de l'énoncé avant de se lancer dans ces calculs.
- (a) Commençons par calculer $(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2(1 + \sqrt{2}) > 1$. On en déduit que $\ln(|x^2 - 1|)$ prend une valeur (largement) positive pour $x = 1 + \sqrt{2}$. Or, le quotient $\frac{2x}{x - 1}$ est tout aussi positif pour $x = 1 + \sqrt{2}$ (numérateur et dénominateur sont alors positifs), donc $g(1 + \sqrt{2}) > 0$.

- (b) Le plus simple est de poser $i(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$ et de dériver la fonction sur $]0, +\infty[$ pour obtenir $i'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. La fonction i est donc décroissante sur $]0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$ et admet pour minimum $i(1) = 0 - 1 + 1 = 0$, donc elle est toujours positive. Autre méthode possible : partir de l'inégalité de convexité évoquée en cours $\ln(x) \leq x - 1$, et l'appliquer à $\frac{1}{x} : \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$, donc $-\ln(x) \leq \frac{1}{x} - 1$ et $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.
- (c) Commençons comme tout à l'heure par calculer $|(1 - \sqrt{2})^2 - 1| = |1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1| = |2 - 2\sqrt{2}| = 2(\sqrt{2} - 1)$. En exploitant la question précédente, on a donc $g(1 - \sqrt{2}) \geq \frac{2(1 - \sqrt{2})}{-\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} = -\sqrt{2} + 2 + 1 - \frac{\sqrt{2} + 1}{2(2 - 1)} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Or, $3\sqrt{2} \simeq 4.2 < 5$, donc l'expression obtenue est positive, ce qui prouve bien que $g(1 - \sqrt{2}) > 0$.

6. Commençons une fois de plus par le plus facile : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$. Pas de problème non plus du côté de -1 : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x-1} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$ (ce qui est dans le $\ln$ ayant bien sûr une limite nulle). C'est un peu plus délicat en 1 , commençons par constater que $(x-1)\ln(|x^2-1|) = (x-1)\ln(|x-1|) + (x-1)\ln(|x+1|)$ a une limite nulle quand x tend vers 1 (même astuce que pour les limites de f en début d'exercice, le premier terme de la somme fait intervenir une croissance comparée après avoir posé éventuellement $X = x-1$ pour faire apparaître plus clairement une limite classique). En mettant au même dénominateur, on constate donc que g a les mêmes limites en 1 que le quotient $\frac{2x}{x-1}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$. On n'oublie pas que g' s'annule en $1 + \sqrt{2}$ et en $1 - \sqrt{2}$, mais change aussi de signe en -1 à cause du facteur $x+1$ de son dénominateur, ce qui permet d'obtenir le tableau de variations suivant pour la fonction g :

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	0	-	+
g	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

7. Si on veut être hyper rigoureux, on invoque à chaque fois le théorème de la bijection. La fonction g est continue strictement décroissante sur $] -\infty, -1[$, donc bijective de cet intervalle vers $\mathbb{R}$ tout entier, et s'annule donc exactement une fois sur cet intervalle (ce qui correspond à la valeur appelée α dans l'énoncé). Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, g a un minimum en $1 + \sqrt{2}$ qui est strictement positif, donc ne s'annule jamais. Enfin, sur $] -1, 1[$, g est strictement croissante puis décroissante, avec un maximum strictement positif mais des limites négatives aux bornes. Elle est donc bijective de $] -1, 1 - \sqrt{2}[$ vers $] -\infty, \gamma[$, avec $\gamma > 0$, et s'annule exactement une fois sur l'intervalle $] -1, 1 - \sqrt{2}[$ (ce qui correspond à la valeur β de l'énoncé). De même, g s'annule exactement une fois sur l'intervalle $]1 - \sqrt{2}, 1[$, mais cette fois-ci on peut facilement dire quand puisqu'on a trivialement $g(0) = 0$.
8. La question précédente montre que f' est positive sur les intervalles $] -\infty, \alpha[$, $[\beta, 0]$ et $]1, +\infty[$ (on rappelle que g et f' sont de même signe), ce qui donne donc un tableau de variation ressemblant à ceci (en considérant la fonction prolongée par continuité en -1 et en 1) :

x	$-\infty$	α	-1	β	0	1	$+\infty$
f		$f(\alpha) \simeq 1.19$	1	$f(\beta) \simeq 0.81$	1	0	$+\infty$

9. (a) Pour se simplifier un peu la vie, on plutôt calculer la limite de $\ln\left(\frac{f(x) - f(1)}{|x - 1|}\right) = \ln(f(x)) - \ln(|x - 1|)$ puisque $f(1) = 0$ après prolongement par continuité. On calcule donc $(x + 1) \ln(|x^2 - 1|) - \ln(|x - 1|) = (x + 1) \ln(|x + 1|) + x \ln(|x - 1|)$. Cette expression a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 1, donc en passant à l'exponentielle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{|x - 1|} = 0$, ce qui prouve la limite souhaitée. La fonction f prolongée en 1 y est donc dérivable, et $f'(1) = 0$, ce qui prouve qu'on aura une tangente horizontale en ce point de la courbe (autrement dit, le point d'abscisse 1 est un « vrai » minimum pour f).
- (b) On sait que $f(-1) = 1$ d'après les calculs de limites effectués plus haut. Or, la convexité de l'exponentielle permet de prouver que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x (puisque la tangente à la courbe de l'exponentielle en son point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$). On peut donc minorer $f(x) - 1$ par $(x + 1) \ln(|x^2 - 1|)$. Sur l'intervalle $] -\infty, -1[$, on a $x^2 - 1 > 0$, donc les valeurs absolues sont inutiles, et $f(x) - 1 \geq (x + 1) \ln(x^2 - 1)$. Si on divise par $x + 1$, qui est négatif, des deux côtés de cette inégalité, on obtient bien $\frac{f(x) - 1}{x + 1} \leq \ln(x^2 - 1)$. Or, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = -\infty$, donc le taux d'accroissement de gauche a aussi pour limite $-\infty$ quand x tend vers 1 par valeur inférieure. C'est suffisant pour prouver que f n'est pas dérivable en -1 , et même en fait pour affirmer que la courbe aura une tangente verticale à cet endroit (la limite à droite étant aussi égale à $+\infty$, même si ce calcul n'était pas demandé dans l'énoncé).
10. On utilise évidemment les valeurs généreusement fournies par l'énoncé pour obtenir cette drôle d'allure :

