

Devoir Surveillé n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

3 octobre 2026

Exercice 1

Les questions de ce premier exercice sont complètement indépendantes les unes des autres :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+3} \geq x-3$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln^2(x) + 2|\ln(x)| > 3$.

4. On note $A = \left\{ \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} \mid (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

Montrer que A est majoré par $\frac{1}{3}$. L'ensemble A admet-il un maximum (si oui, lequel) ? Une borne supérieure ? Un minimum ? Une borne inférieure ?

5. Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (4x - 3y, 2x + y) \end{cases}$ est bijective, et donner une expression explicite de sa réciproque f^{-1} .

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2$.

1. Vérifier que les deux fonctions définies par $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = -x$ sont solutions de ce problème. Dans toute la suite du problème, on note f une fonction solution de l'équation.
2. Montrer que, pour tout réel y , on a $f(f(y)) = y + f(0)^2$.
3. En déduire que la fonction f est nécessairement injective.
4. Toujours à l'aide du résultat de la question 2, montrer que f est également surjective.
5. En déduire qu'il existe un unique réel x_0 vérifiant $f(x_0) = 0$.
6. En utilisant x_0 , montrer que, pour tout réel y , $f(f(y)) = y$.
7. Montrer que $x_0 = 0$.
8. Justifier que $f(tf(t)) = t^2$, puis que $(f(t))^2 = t^2$ et enfin que $f(t) = t$ ou $f(t) = -t$ pour tout réel t . A-t-on démontré que les fonctions g_1 et g_2 sont les seules solutions du problème initial ?
9. On suppose dans cette question que $f(1) = 1$. Montrer que $f(1 + f(y)) = 1 + y$, puis que $(1 + y)^2 = 1 + 2f(y) + (f(y))^2$ pour tout réel y , et en déduire que $f = g_1$.
10. Montrer de même qu'en supposant $f(1) = -1$, on a nécessairement $f = g_2$.
11. Conclure.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice sont complètement indépendantes. On pose dans cet exercice $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$, n désignant un entier naturel quelconque, et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

A. Étude des fonctions f_0 et f_1 .

1. Déterminer les limites de f_0 et de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 .
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_0$ en son point d'abscisse 0.
(b) Montrer que la position relative de cette tangente et de $\mathcal{C}_0$ dépend du signe de $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.
(c) Dériver deux fois la fonction g , et en déduire le signe de g'' , puis celui de g' et enfin celui de g .
(d) Conclure sur la position relative de $\mathcal{C}_0$ et de la tangente calculée plus haut.
4. Montrer que $f_1(-x) = f_0(x)$ et que $f_1(x) = 1 - f_0(x)$. Quelles symétries peut-on en déduire sur les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_0$ (il s'agit dans les deux cas de symétries par rapport à des droites) ?
5. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$, ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_0$ étudiée en question 3.

B. Des calculs d'intégrales.

On note dans cette deuxième partie $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Calculer la valeur de u_0 .
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$, en déduire u_1 .
3. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$. En déduire la valeur de u_2 .
5. En posant $v_n = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$, déterminer la limite de la suite (v_n) . En déduire rigoureusement celle de la suite (u_n) .

Exercice 4

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction f définie par $f(x) = |x^2 - 1|^{x+1}$. On rappelle (puisqu'on l'a vu en cours très récemment) qu'on peut écrire cette puissance sous la forme $f(x) = e^{(x+1)\ln(|x^2-1|)}$, forme qu'on conservera pour toute l'étude effectuée dans cet exercice.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f . Peut-on affirmer que f sera dérivable sur tout cet ensemble de définition ?
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. On devrait en particulier obtenir des limites finies aux endroits où f n'était pas définie, et on continuera à noter f la fonction prolongée par continuité en ces endroits et désormais définie sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que la dérivée d'une fonction de la forme $\ln(|u|)$ est toujours égale à $\frac{u'}{u}$, indépendamment du signe de u .
(b) Calculer la dérivée f' de la fonction f , et montrer qu'elle a le même signe que $g(x) = \frac{2x}{x-1} + \ln(|x^2-1|)$.
4. Calculer la dérivée g' de la fonction g introduite à la question précédente. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$.
5. (a) Montrer que $g(1 + \sqrt{2}) > 0$.
(b) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.
(c) En déduire que $g(1 - \sqrt{2}) > 0$.
6. Calculer les limites de la fonction g aux bornes de son domaine de définition, et dresser son tableau de variations.
7. Justifier que la fonction g s'annule exactement trois fois : en un réel « évident » à préciser, en un réel $\alpha \in]-\infty, -1[$, et en un réel $\beta \in]-1, 1 - \sqrt{2}[$. On ne cherchera absolument pas à calculer α et β . D'ailleurs, on donne $\alpha \simeq -1.16$, $f(\alpha) \simeq 1.19$, $\beta \simeq -0.76$ et $f(\beta) \simeq 0.81$.
8. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
9. On rappelle qu'une fonction f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a . Cette limite finie est alors égale à $f'(a)$.
(a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$. Que peut-on en déduire ?
(b) En exploitant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que $\forall x \in]-\infty, -1[$, $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \leq \ln(x^2 - 1)$. Que peut-on en déduire ?
10. Tracer une allure crédible de la courbe représentative de la fonction f .