

Devoir Surveillé n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 septembre 2026

Exercice 1

1. On peut multiplier par e^x (qui ne s'annule jamais) pour obtenir l'équation équivalente $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$, puis effectuer le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 4X + 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $X_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{4-2}{2} = 1$. Ces deux valeurs étant strictement positives, on les conserve toutes les deux pour obtenir $x = \ln(3)$ ou $x = \ln(1) = 0$. Conclusion : $\mathcal{S} = \{0, \ln(3)\}$.
2. Avant de faire quoi que ce soit, on précise bien que cette équation ne peut avoir de sens que si les expressions dans les logarithmes sont strictement positives, donc si $x > -1$ et $x > 2$. Autrement dit, on ne va résoudre que sur l'intervalle $]2, +\infty[$. Sur cet intervalle, on peut regrouper les $\ln$ de gauche : $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln((x+1)(x-2)) = \ln(x^2 - x - 2)$. On passe ensuite à l'exponentielle dans chacun des deux membres (en se rappelant que $2\ln(2) = \ln(2^2) = \ln(4)$) pour obtenir l'équation du second degré équivalente $x^2 - x - 2 = 4$, soit $x^2 - x - 6 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et pour racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$. Il faut éliminer la deuxième valeur pour laquelle l'équation initiale n'était pas définie : $\mathcal{S} = \{3\}$.
3. Pour résoudre ce type d'inéquation très classique, on passe tout du même côté de l'inégalité avant de faire un tableau de signes : $\frac{2x^2 + x - 2(2x^2 - x - 1)}{2x^2 - x - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x^2 - x - 1} < 0$. Le numérateur de cette inéquation a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$ et pour racines $x_1 = \frac{-3-5}{-4} = 2$ et $x_2 = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}$, le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et pour racines $x_3 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_4 = \frac{1+3}{4} = 1$. On constate que numérateur et dénominateur ont une racine commune, ce qui aurait éventuellement permis de simplifier l'équation (mais en conservant tout de même la valeur interdite correspondante) si on s'en était rendu compte plus tôt. Autant faire le tableau de signes initialement prévu, en notant Q le quotient dont on étudie le signe :

x	$-\frac{1}{2}$	1	2
$-2x^2 + 3x + 2$	- 0 +	+ 0 -	
$2x^2 - x - 1$	+ 0 -	0 +	+
Q	- -	+ 0 -	

Conclusion : $\mathcal{S} = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[\cup]2, +\infty[$.

4. On va utiliser la même méthode que ci-dessus pour la deuxième équation. L'inéquation est définie si les trois conditions suivantes sont vérifiées : $x > -3$, $x < 1$ et $x > -2$. Autrement dit, on va résoudre sur l'intervalle $] -2, 1[$, sur lequel l'inéquation est équivalente (après regroupement des $\ln$ puis passage à l'exponentielle) à $(x+3)(1-x) \leq x+2$, soit $-x^2 - 2x + 3 \leq$

$x + 2$, ou encore $x^2 + 3x - 1 \geq 0$. Cette inéquation a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$ et admet donc comme racines $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$. En exploitant le fait que $3 < \sqrt{13} < 4$, on vérifie aisément que $x_1 < -2$ et $x_2 \in]-2, 1[$. Notre trinôme étant positif à l'extérieur de ses racines, le seul intervalle inclus dans notre intervalle de définition est donc $\mathcal{S} = \left] \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, 1 \right[$.

5. Encore une fois, il faut commencer par préciser un domaine de résolution. Le trinôme $x^2 - x - 2$ sous la racine a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et pour racines $x_1 = \frac{1 - 3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1 + 3}{2} = 2$. Il est positif à l'extérieur de ses racines, ce qui signifie que l'inéquation a un sens sur les deux intervalles $] - \infty, -1]$ et $[2, +\infty[$. Inutile de se fatiguer à résoudre sur le premier intervalle : si $x \leq -1$, $2x - 4 < 0$, donc l'inégalité est trivialement vérifiée (une racine carrée étant bien sûr toujours positive). Sur l'intervalle $[2, +\infty[$, par contre, les deux membres sont positifs, et on peut donc élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $x^2 - x - 2 \geq 4x^2 - 16x + 16$, soit $3x^2 - 15x + 18 \leq 0$, ou encore $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ en simplifiant tout par 3. Le membre de gauche de cette inéquation a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ et pour racines $x_3 = \frac{5 - 1}{2} = 2$ et $x_4 = \frac{5 + 1}{2} = 3$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[2, 3]$. Finalement, $\mathcal{S} =] - \infty, 1] \cup [2, 3]$.

Exercice 2

1. On pose donc $f_1(x) = xe^{-x}$. Par croissance comparée classique, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée de ce côté). La fonction f_1 est évidemment dérivable et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, puis $f_1''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$. Ces deux dérivées sont respectivement du signe de $1 - x$ et de $x - 2$, ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

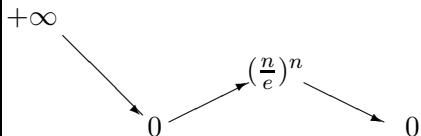
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f_1''(x)$		-	-	0	+
$f_1'(x)$		+	+	0	-
f_1					
convexité	concave		concave	concave	convexe

Calcul des valeurs utiles : $f_1(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$; $f_1(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$ et $f_1'(2) = -\frac{1}{e^2}$ (qui représente la pente de la tangente au point d'inflexion de la courbe, qu'on essaiera de respecter lors du tracé en fin d'exercice).

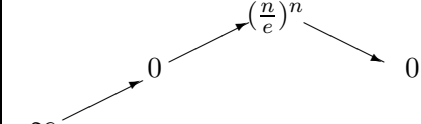
2. En posant $f_2(x) = x^2e^{-x}$, on a toujours $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$ (croissance comparée), mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty$. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_2'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$. Cette dérivée s'annule en 0 et en 2 (et elle est positive uniquement entre ces deux valeurs). On calcule donc $f_2(0) = 0$ et $f_2(2) = \frac{4}{e^2}$ puis on dresse le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'_2(x)$		$- \quad \quad + \quad \quad -$		
f_2	$+\infty$	0	$\frac{4}{e^2}$	0

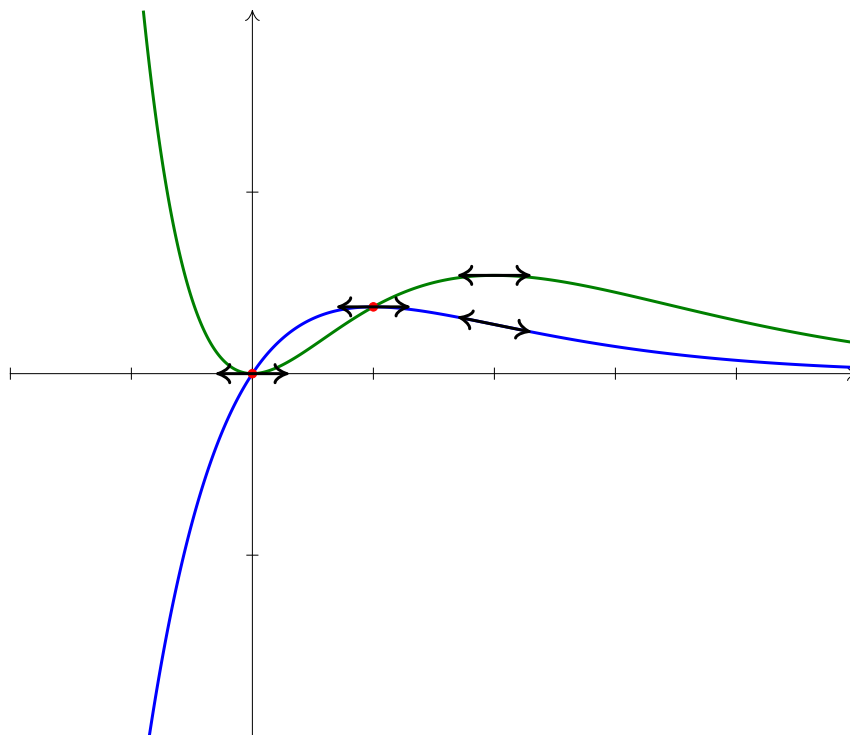
3. Toutes les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$. Cette dérivée s'annule en 0 (sauf pour $n = 1$) et en n . Elle change de signe en 0 seulement lorsque n est un entier pair (dans ce cas x^{n-1} est négatif sur $]-\infty, 0]$ puis positif ensuite). Si n est impair, x^{n-1} est toujours positif (puissance paire), et le seul changement de variations s'effectue en $x = n$, avec $f_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Quelle que soit la valeur de n , on aura toujours $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ (c'est toujours de la croissance comparée). Par contre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ si n est pair, mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ si n est impair, ce qui est cohérent avec les variations de f_n . En résumé, lorsque n est pair, on a un tableau de variations ressemblant à celui de f_2 :

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	$\emptyset$	$\emptyset$	$-$
f_n	$+\infty$ 			

Et lorsque n est impair, c'est encore plus simple, même s'il y a tout de même une tangente horizontale en 0 à partir de $n = 3$:

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	$\emptyset$	$\emptyset$	$-$
f_n				

4. On constate que $f_2(x) - f_1(x) = x^2 e^{-x} - x e^{-x} = x(x-1)e^{-x}$, qui est du signe de $x(x-1)$. Cette quantité est négative sur $[0, 1]$, intervalle sur lequel $\mathcal{C}_2$ sera donc en-dessous de $\mathcal{C}_1$. Sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$, c'est $\mathcal{C}_1$ qui est en-dessous de $\mathcal{C}_2$. Les deux courbes se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Plus généralement, il faut simplement étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^n(x-1)e^{-x}$. L'exponentielle étant toujours positive, cette différence est du signe de $x^n(x-1)$. Lorsque n est pair, on obtient exactement les mêmes positions relatives que pour $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et les mêmes points d'intersection. Lorsque n est impair, les points d'intersection restent les mêmes, mais $\mathcal{C}_{n+1}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ sur tout l'intervalle $]-\infty, 1]$, et au-dessus uniquement sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5. Voici les deux courbes demandées, $\mathcal{C}_1$ en bleu et $\mathcal{C}_2$ en vert, avec les points d'intersection indiqués en rouge. On a aussi indiqué les tangentes horizontales, bien entendu, ainsi que la tangente au point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}_1$.



Exercice 3

1. La fonction f est définie si $1 - x^2 > 0$ (inégalité stricte car on ne peut pas permettre au dénominateur de s'annuler), donc $\mathcal{D}_f =]-1, 1[$.
2. Les seules limites à calculer sont à droite de -1 et à gauche de 1 . Le dénominateur y tend vers 0 tout en restant positif dans les deux cas. Comme $2 - x$ est positif sur tout l'intervalle $[-1, 1]$ (et ne s'annule ni en -1 ni en 1), on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et $f'(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} - (2-x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$
 $= \frac{-(1-x^2) + x(2-x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur $2x-1$,

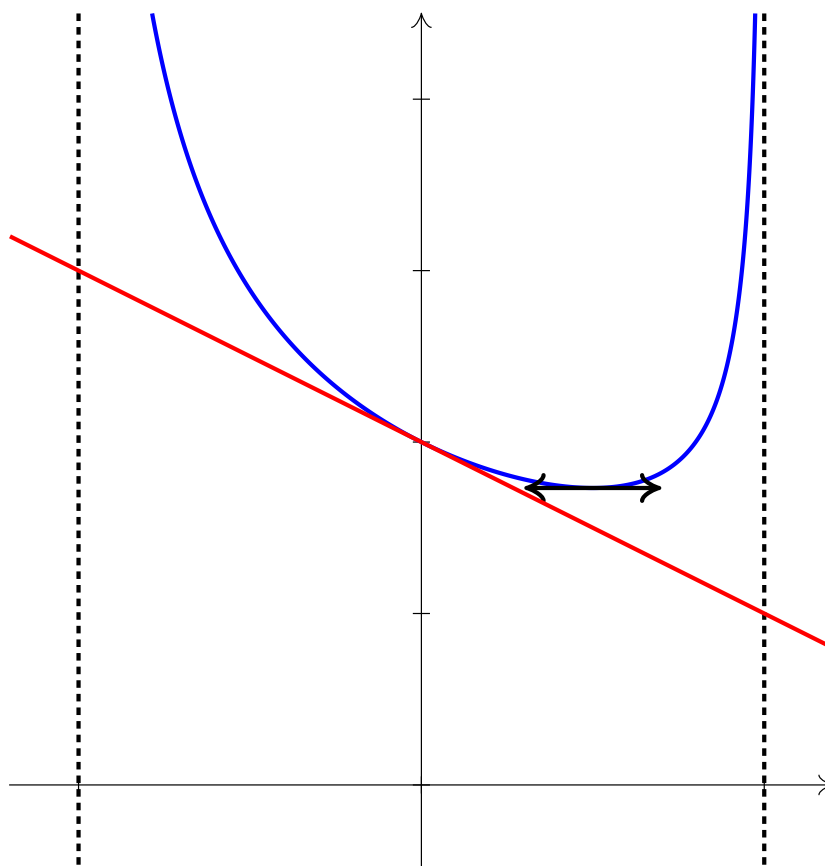
donc négative à gauche de $\frac{1}{2}$ et positive sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. On calcule la valeur du minimum de f :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}.$$

Même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé, on va résumer les informations obtenues dans les deux questions précédentes dans un tableau de variations :

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
f_n	$+\infty$	$\sqrt{3}$	$+\infty$

4. On dérive une nouvelle fois l'expression obtenue pour f' (qui est toujours dérivable sur $] - 1, 1[$) : $f''(x) = \frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - (2x-1) \times \frac{3}{2} \times (-2x)\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3} = \frac{2(1-x^2) + 3x(2x-1)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4x^2 - 3x + 2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, c'est-à-dire la formule annoncée par l'énoncé. Le dénominateur de f'' est toujours positif sur $] - 1, 1[$, et son numérateur aussi puisque son discriminant $\Delta = 9 - 32$ est strictement négatif. La fonction f est donc convexe sur tout l'intervalle $] - 1, 1[$.
5. On calcule $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$. L'équation de la tangente demandée est donc $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) = -x + 2$. Pour obtenir la position relative, soit on exploite la convexité de la fonction f (une fonction convexe a une courbe qui est toujours située au-dessus de ses tangentes), soit on calcule $f(x) - (2 - x) = (2 - x) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right)$, et on constate que $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$ sur l'intervalle $] - 1, 1[$, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \geq 0$, ce qui confirme que $f(x) \geq 2 - x$ sur tout l'intervalle $] - 1, 1[$.
6. À part cette fameuse tangente (tracée en rouge) et bien sûr les asymptotes verticales à gauche et à droite de la courbe, il n'y a pas grand chose à indiquer en fait :



Problème (d'après un sujet de bac marocain de 2020)

Première partie :

1. (a) On va utiliser la méthode suggérée dans l'énoncé : la fonction h_1 est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et $h_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$. Cette dérivée est négative sur $[0, +\infty[$, ce qui

prouve que h_1 est strictement décroissante sur cet intervalle. Or, $h_1(0) = \ln(1) - 0 = 0$, donc h_1 prend des valeurs strictement négatives sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve la première inégalité. De même, h_2 est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et $h_2'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$. À nouveau, on a une dérivée strictement négative donc une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Mais cette fois-ci, comme on veut montrer que h_2 prend des valeurs strictement positives, c'est la limite en $+\infty$ qu'il faut calculer : comme $h_2(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_2(x) = \ln(1) + 0 = 0$ (plus de forme indéterminée sous cette forme). La fonction h_2 est strictement décroissante et a une limite nulle en $+\infty$, elle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui prouve la deuxième inégalité demandée.

- (b) Le calcul effectué ci-dessus prouve que $h_2(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$, donc $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$. De plus, on sait que $\ln(1+x) < x$ si $x > 0$. En posant $X = \frac{1}{x}$ qui est lui aussi strictement positif, on peut donc affirmer que $\ln\left(1 + \frac{1}{X}\right) < \frac{1}{X}$, inégalité valable pour tous les inverses de nombres strictement positifs, donc sur $]0, +\infty[$.

- (c) On ne le reprécisera pas à chaque question, mais tous les calculs et encadrements obtenus par la suite sont valables sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Le facteur x^3 étant positif, on peut multiplier terme à terme l'encadrement de la question précédente par x^2 pour obtenir $\frac{x^2}{x+1} < \frac{f(x)}{x} < x$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ (ce qui signifie que le **taux d'accroissement** de f en 0 a une limite nulle, d'où la précision de l'énoncé sur la dérivabilité de f en 0).

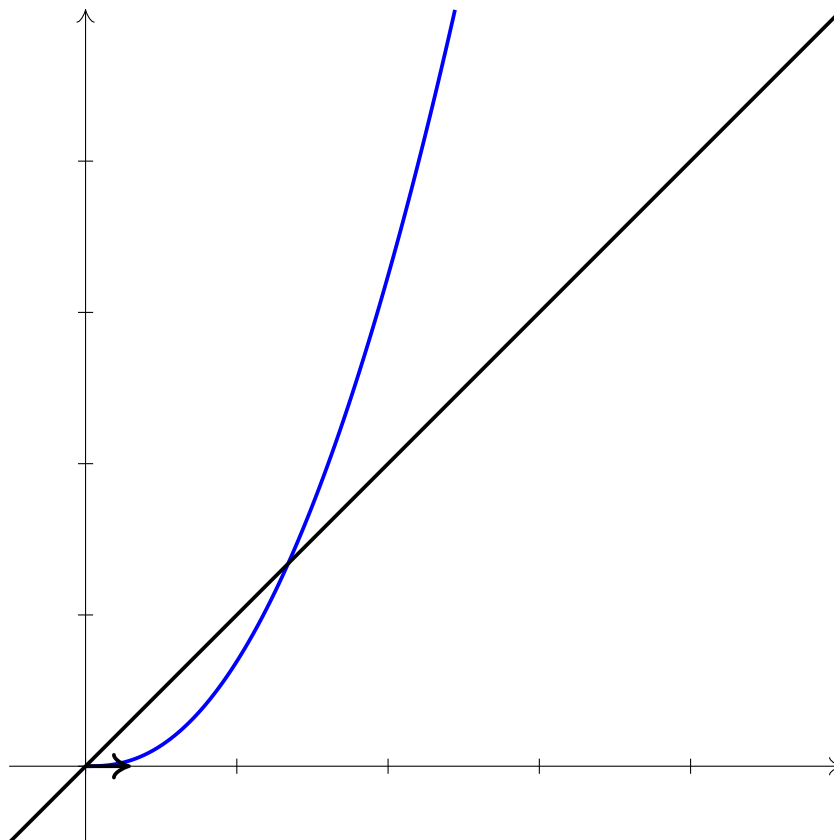
- (d) Cette fois-ci, on n'a même pas besoin de l'encadrement complet, l'inégalité de gauche suffit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$ (quotient des termes de plus haut degré égal à x , ou factorisation du dénominateur par x si vous préférez), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. On verra plus tard dans l'année qu'on pourrait en fait être plus précis et écrire $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, ce qui signifie en gros que le comportement de f en $+\infty$ est très proche de celui de la fonction carré).

2. (a) C'est un calcul direct (f est bien dérivable sur $]0, +\infty[$), mais on peut commencer par calculer la dérivée de $z : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ pour se rassurer : $z'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{x(x+1)}$, puis $f'(x) = 3x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^3}{x(1+x)} = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$.

- (b) On a prouvé plus haut que $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{1+x}$, donc a fortiori $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{3(1+x)}$. La dérivée f' est donc strictement positive, et f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Un tableau de variations vraiment sans intérêt (les limites de f découlent directement de celles calculées plus haut pour $\frac{f(x)}{x}$, puisque le produit par x va seulement faire tendre f « encore plus vite » vers 0 en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$) :

x	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$

3. (a) On a donc $g(x) = x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Le calcul est pratiquement le même que pour la dérivée de f (on reprend d'ailleurs la dérivée de z calculée ci-dessus) : g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{x(x+1)} = 2x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)} \right)$. Par le même argument que pour f , cette dérivée est strictement positive, donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, on connaît déjà les limites de g qu'on a calculées plus haut. Je refuse de refaire un tableau de variations qui sera exactement le même que celui de la fonction f .
- (b) Si on veut être extrêmement rigoureux, il s'agit d'une application du théorème de la bijection : g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ vers lui-même (au vu des limites de g). En particulier, le réel 1 qui appartient à $]0, +\infty[$ admet un unique antécédent par la fonction g . Pour obtenir l'encadrement demandé, on calcule $g(1) = 1^2 \ln \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \ln(2) \simeq 0.7 < 1$, ce qui prouve que $1 < \alpha$ (puisque g est strictement croissante), et $g(2) = 2^2 \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 4 \ln \left(\frac{3}{2}\right) = 4(\ln(3) - \ln(2)) \simeq 4 \times (1.1 - 0.7) \simeq 1.6 > 1$, donc $\alpha < 2$.
- (c) Attention à ne pas tomber dans un piège idiot : si $f(x) = x$, on peut en déduire que $\frac{f(x)}{x} = 1$ seulement si $x \neq 0$. Or, 0 est aussi solution de l'équation $f(x) = x$ puisque par définition $f(0) = 0$. Il y a donc deux solutions à cette équation : 0 et α .
4. On sait que g est croissante, donc $g(x) < 1$ sur l'intervalle $]0, \alpha[$, ce qui revient à dire que $\mathcal{C}$ est en-dessous de la droite d'équation $y = x$ sur cet intervalle. Ensuite $g(x) > 1$ donc $f(x) > x$ et la courbe passe au-dessus de la droite. Bien sûr, on ne connaît pas la valeur exacte de α donc on le place aléatoirement dans l'intervalle $]1, 2[$. On n'oublie pas la tangente horizontale en 0 (question 1.c) :



Deuxième partie :

1. On a prouvé dans la première partie que $\alpha \in]1, 2[$, donc $u_0 = 1 \in]0, \alpha[$, ce qui initialise la récurrence. Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel n , $0 < u_n < \alpha$, alors on peut appliquer la croissance stricte de la fonction f pour en déduire que $f(0) < f(u_n) < f(\alpha)$. Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(\alpha) = \alpha$, donc on obtient l'encadrement $0 < u_{n+1} < \alpha$, ce qui prouve exactement l'hérédité de notre récurrence et montre donc que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]0, \alpha[$.
2. C'est évident puisque la fonction g est strictement croissante et vérifie $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ et $g(\alpha) = 1$. Si $x \in]0, \alpha[$, on a donc $0 < \frac{f(x)}{x} < 1$, donc $f(x) < x$. Appliqué à $x = u_n$ (qui appartient à l'intervalle d'après la question précédente), cela donne $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge (théorème de convergence monotone). De plus, si on note l la limite de la suite, on aura également $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, un passage à la limite assure que $f(l) = l$, donc $l = 0$ ou $l = \alpha$ d'après les résultats de la fin de la première partie. On ne peut pas avoir $l = \alpha$ quand $u_0 = 1$ et que la suite est décroissante, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Troisième partie.

1. (a) La fonction f étant toujours positive, les aires calculées à l'aide d'intégrales seront positives, à condition toutefois que les bornes de l'intégrale soient **dans le bon sens**. Ici, si $x \leq 1$, on intègre dans le bon sens donc $F(x) \geq 0$, mais si $x > 1$, $F(x) = \int_x^1 f(t) dt =$

$$-\int_1^x f(t) dt < 0.$$

- (b) Si on note G une primitive quelconque de f , alors $F(x) = [G(t)]_x^1 = G(1) - G(x)$. Autrement dit, à une constante près, F est égale à l'**opposé** d'une primitive de f , donc $F' = -f$ (ce signe est une fois de plus du au sens choisi pour les bornes de l'intégrale).
- (c) La fonction f étant positive, son opposée $-f$ est négative, donc F est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Si $x \geq 1$, $F(x) = -\int_1^x f(t) dt$. Or, l'étude de la fonction f et sa croissante stricte prouvent que, $\forall x > 1, \forall t \in [1, x], f(t) \geq f(1) = \ln(2)$. On en déduit que $\int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \ln(2) dt = [\ln(2)t]_1^x = \ln(2)(x-1)$. On a donc $-F(x) \leq (x-1)\ln(2)$, soit $F(x) \leq (1-x)\ln(2)$ en changeant les signes.
3. (a) La seule façon raisonnable de faire une IPP est de se débarrasser du $\ln$, donc de poser $u(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, d'où $u'(t) = -\frac{1}{t(t+1)}$ (calcul de dérivée effectué dans la première partie de ce problème), et $v'(t) = t^3$ qu'on peut intégrer en $v(t) = \frac{t^4}{4}$. On obtient alors
$$F(x) = \left[\frac{t^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^4}{4} \times \frac{-1}{t(t+1)} dt = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt,$$
 ce qui est exactement la formule de l'énoncé.
- (b) On part de l'expression de gauche et on met tout au même dénominateur : $at^2 + bt + c + \frac{d}{1+t} = \frac{at^2(1+t) + bt(1+t) + c(1+t) + d}{1+t} = \frac{at^3 + (a+b)t^2 + (b+c)t + c+d}{1+t}$. Si on veut que cette expression ait un numérateur égal à t^3 , on impose simplement $a = 1$, puis $b = -1$ (pour avoir $(a+b)t^2 = 0$), $c = 1$ et $d = -1$. Autrement dit, $\int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt = \int_x^1 t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1) \right]_x^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) = \frac{5}{6} - \ln(2) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$.
- (c) En reprenant l'expression obtenue via l'intégration par parties et le résultat de la question précédente, $F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{5}{24} - \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(x+1)$. Or, les termes $-\frac{x^3}{12}$, $\frac{x^2}{8}$ et $-\frac{x}{4}$ ont manifestement une limite nulle en 0. On a aussi $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$ en reprenant les résultats de la première partie. Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \ln(1+x) = \frac{1}{4} \ln(1) = 0$. Les termes en $\frac{\ln(2)}{4}$ ayant le bon goût de se simplifier, il ne reste plus que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 f(t) dt = \frac{5}{24}$. Cette limite représente logiquement la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$, c'est-à-dire l'aire sous la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. (a) Par définition, $F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(t) dt - \int_{\frac{k}{n}}^1 f(t) dt = -\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(t) dt$ (relation de Chasles sur les intégrales). Or, la fonction f étant strictement croissante, on peut dire que, lorsque $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$, alors $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$. On a le droit d'intégrer cet encadrement entre les bornes $\frac{k}{n}$ et $\frac{2k+1}{2n}$. La largeur de l'intervalle d'intégration

est alors $\frac{2k+1}{2n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{2n}$, et puisqu'on intègre des constantes à gauche et à droite, on obtient simplement $\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$. Il suffit de passer à l'opposé pour obtenir l'encadrement demandé.

- (b) La fonction f étant strictement croissante, on peut remplacer dans l'encadrement précédent le membre de gauche par $-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ (on obtiendra juste un résultat moins précis). On additionne alors tous ces encadrements pour k variant entre 0 et $n-1$. À droite, on obtient comme souhaité $-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$. À gauche, avec la modification déjà effectuée, on trouve comme minorant $-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^nf\left(\frac{k}{n}\right)$ en décalant les valeurs de l'indice k (on remplace $k+1$ par k et on fait varier k entre 1 et n , ce qui revient à additionner exactement les mêmes termes, écrivez la somme « avec des pointillés » si vous n'êtes pas convaincus). Enfin, au milieu, on obtient $\sum_{k=0}^{n-1}F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)$, c'est-à-dire exactement la définition de v_n . Bref, on a bien l'encadrement souhaité.
- (c) L'énoncé nous fournit gentiment la limite (commune) du majorant et du minorant de v_n obtenus à la question précédente : ils tendent tous les deux vers $-\frac{1}{2}\int_0^1 f(t) dt = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{24} = -\frac{5}{48}$. D'après le théorème des gendarmes, on peut donc tranquillement affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{5}{48}$, un résultat dont l'intérêt est à la hauteur de cette superbe fin de problème !