

Devoir Surveillé n° 1

MPSI Lycée Camille Jullian

12 septembre 2026

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^x - 4 + 3e^{-x} = 0$
2. $\ln(x+1) + \ln(x-2) = 2\ln(2)$
3. $\frac{2x^2 + x}{2x^2 - x - 1} < 2$
4. $\ln(x+3) + \ln(1-x) < \ln(x+2)$
5. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 2x - 4$

Exercice 2

On définit dans cet exercice les fonctions f_n par $f_n(x) = x^n e^{-x}$, où n est un entier naturel non nul. On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes pour les tracés de courbes : $e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0.37$ et $e^{-2} = \frac{1}{e^2} \simeq 0.14$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

1. Effectuer une étude complète de la fonction f_1 (limites, variations, convexité, mais **pas** de courbe pour l'instant).
2. Effectuer une étude un peu moins complète de la fonction f_2 (seulement le tableau de variations complet, **pas** de convexité cette fois-ci, ni de courbe).
3. Calculer plus généralement la dérivée f'_n de la fonction f_n , et dresser le tableau de variations de f_n .
4. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, puis plus généralement celle des courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ (rappel : étudier la position relative revient à déterminer sur quels intervalles une courbe est située au-dessus ou en-dessous d'une autre). On précisera en particulier les coordonnées des points communs à ces courbes.
5. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 3

On va étudier dans cet exercice la fonction f définie par $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de cette fonction.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , en déduire les variations de f (on dressera un tableau de variations en exploitant les résultats de cette question et de la précédente).
4. Montrer que la dérivée seconde de f a pour expression $f''(x) = \frac{4x^2 - 3x + 2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. En déduire la convexité de la fonction f .
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0, puis étudier la position relative de la courbe et de cette tangente.
6. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}_f$ en tenant compte de tous les calculs effectués (on représentera en particulier la tangente étudiée à la question précédente dans le même repère).

Problème (d'après un sujet de bac marocain de 2020)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, qu'on prolonge à l'intervalle $[0, +\infty[$ en imposant la valeur supplémentaire $f(0) = 0$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

1. (a) Démontrer que $\forall x > 0$, on a les deux inégalités suivantes : $\ln(1+x) < x$, et $\ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1}$. Pour démontrer ces inégalités, on pourra étudier les variations des fonctions $h_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $h_2 : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$.
(b) En déduire que, $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.
(c) Montrer à l'aide de l'encadrement précédent que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$. Ce calcul de limite prouve que la fonction f est dérivable (et donc continue) en 0 et que $f'(0) = 0$, ce qu'on pourra utiliser lors du tracé de la courbe $\mathcal{C}$.
(d) À l'aide du même encadrement, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Ce calcul de limite prouve que la courbe $\mathcal{C}$ a une croissance rapide du côté de $+\infty$ (similaire à celle de la parabole représentative de la fonction carré).
2. (a) Montrer que la fonction dérivée de f a pour expression $f'(x) = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right)$.
(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. On note dans cette question $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
(a) Calculer la dérivée g' de la fonction g , puis dresser le tableau de variations de g .
(b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^{+*}$. En notant α cette solution, montrer que $\alpha \in]1, 2[$.

- (c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$.
4. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = x$ dans le même repère (on veillera à bien respecter la position relative de la courbe et de cette droite).

Deuxième partie :

On considère dans cette partie la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est bien entendu la fonction étudiée dans la première partie).

1. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \alpha[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0, \alpha[, g(x) \in]0, 1[$, en déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite (on essaiera de justifier le plus rigoureusement possible) ?

Troisième partie.

On considère dans cette dernière partie la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$. La question 4 de cette dernière partie peut être considérée comme une question bonus, à n'aborder que si vous vous ennuyez vraiment en fin de devoir (elle fait intervenir des calculs de sommes, sur lesquels on n'a pas du tout travaillé depuis le début de l'année).

1. (a) Déterminer le signe de $F(x)$ (on pourra distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur de x).
- (b) Déterminer la dérivée F' de la fonction F (attention, il y a un petit piège).
- (c) En déduire que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que, $\forall x \geq 1, F(x) \leq (1-x) \ln(2)$.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt.$$

- (b) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $at^2 + bt + c + \frac{d}{1+t} = \frac{t^3}{t+1}$. En déduire la valeur de $\int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt$.
- (c) En déduire une expression explicite de $F(x)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de la valeur de cette limite ?
4. On définit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$.
 - (a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n-1$, alors

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
 - (b) En déduire que $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
 - (c) On **admet** le résultat suivant : si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$. Montrer alors que la suite (v_n) converge, et préciser la valeur de sa limite.