Devoir Maison n° 8 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

4 novembre 2026

Filtres et ultrafiltres.

A. Définition et exemples.

1. L'ensemble $\mathcal{F}_1$ n'est pas un filtre car il n'est pas stable par inclusion supérieure : le sous-ensemble $\{1,3\}$ contient le sous-ensemble $\{1\}$, mais ce dernier appartient à $\mathcal{F}_1$ et pas $\{1,3\}$. L'ensemble $\mathcal{F}_2$ n'est pas non plus un filtre car il n'est pas stable par intersection : $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \notin \mathcal{F}_2$. Par contre, $\mathcal{F}_3$ est bien un filtre, c'est même le filtre principal engendré par le sous-ensemble $\{1\}$ avec le vocabulaire introduit en question 6 : il est constitué de tous les sous-ensembles incluant l'élément 1, d'où sa stabilité par intersection (si deux sous-ensembles contiennent 1, leur intersection aussi), et si un ensemble inclut un sous-ensemble contenant 1, alors il contient aussi 1.
2. La stabilité par inclusion supérieure impliquerait que tout sous-ensemble de E appartienne à $\mathcal{F}$, on aurait donc nécessairement $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.
3. Il faudrait déjà qu'il soit stable par intersection, ce qui ne sera jamais le cas dès que E contient au moins deux éléments distincts x et y. En effet, dans ce cas, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont deux parties non-vides de E mais leur intersection est vide. Le seul cas où $\mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$ est un filtre sur E est celui où E ne contient qu'un seul élément (et dans ce cas, le filtre en question ne contient lui aussi qu'un seul élément égal à E).
4. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-ensembles de E dont le complémentaire est fini. Commençons par constater que l'ensemble vide a un complémentaire égal à $\mathbb{N}$ qui est un ensemble infini, donc $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Ensuite, si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, alors $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ est par définition l'union de deux ensembles finis, donc reste un ensemble fini, ce qui prouve que $A \cap B \in \mathcal{F}$, et donc que $\mathcal{F}$ est stable par intersection. Enfin, $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$, donc si A est de complémentaire fini et $A \subset B$, alors $\overline{B}$ est inclus dans un ensemble fini, donc également fini, et $B \in \mathcal{F}$, ce qui prouve la stabilité par inclusion supérieure. L'ensemble $\mathcal{F}$ est bien un filtre sur E.
5. C'est essentiellement trivial : l'ensemble vide ne contient pas 42, deux sous-ensembles contenant 42 ont une intersection qui contient toujours 42, et un ensemble contenant un sous-ensemble auquel appartient 42 contient manifestement 42.
6. C'est exactement le même principe, mais l'énoncé aurait quand même du préciser que $A \neq \emptyset$ pour éviter d'avoir $\mathcal{F}_\emptyset = \mathcal{P}(E)$ qui n'est pas un filtre. Une fois ce cas particulier évacué, $\mathcal{F}_A$ ne peut plus contenir l'ensemble vide, il est clairement stable par inclusion supérieure par transitivité de la relation d'inclusion (si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$), et il est également stable par intersection : si $A \subset B$ et $A \subset C$, alors $A \subset B \cap C$ de façon évidente.
7. Supposons que ce filtre soit égal à $\mathcal{F}_A$, avec $A \neq \emptyset$. Puisque $A \in \mathcal{F}_A$, cela signifie que A est un ensemble dont le complémentaire est fini. Mais si on choisit un élément $x \in A$ (A ne pouvant pas être vide, c'est toujours possible), l'ensemble $B = A\backslash\{x\}$ est toujours un ensemble à complémentaire fini (on a simplement ajouté un élément par rapport au complémentaire de A qui est par hypothèse fini), donc on devrait avoir $B \in \mathcal{F}_A$, ce qui est clairement absurde puisque A n'est pas inclus dans B (c'est en l'occurrence le contraire, avec inclusion stricte). L'ensemble des sous-ensembles à complémentaire fini n'est donc pas un filtre principal sur $\mathbb{N}$.

8. Si $A \neq B$, il existe un élément x appartenant à l'ensemble A mais pas à l'ensemble B (ou le contraire, peu importe, les deux ensembles jouent un rôle symétrique). Dans ce cas, on ne peut pas avoir $A \subset B$, donc $B \notin \mathcal{F}_A$. Pourtant, $B \in \mathcal{F}_B$, ce qui prouve que $\mathcal{F}_B \neq \mathcal{F}_A$. Une autre façon de voir les choses : dire que $A \neq B$ est équivalent à dire que $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$ (négation du principe de double inclusion). Dans les deux cas, les deux filtres ne peuvent pas être identiques.

   Il y a donc dans un ensemble fini au moins autant de filtres différents que de sous-ensembles non vides de cet ensemble. Comme $\{1, 2, \ldots, n\}$ contient au total 2^n sous-ensembles, il a donc au moins $2^n - 1$ filtres différents (ce qui ne fait pas tant que ça si on considère qu'il existe 2^{2^n} sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$, donc autant de filtres potentiels).

9. Si $\mathcal{F}$ contient un ensemble B de cardinal minimal n_0, alors celui-ci est unique. En effet, si on avait deux tels ensembles B et C distincts, alors $B \cap C$ serait aussi un élément du filtre, qui contiendrait strictement moins de n_0 éléments. Soit maintenant un ensemble D appartenant au filtre, et qui ne vérifierait pas $B \subset D$ (où B désigne donc l'unique élément du filtre de cardinal minimal). Alors cela signifie qu'il existe au moins un élément de B n'appartenant pas à D, et donc que $B \cap D$ est un sous-ensemble de B distinct de B. On vient alors de construire un ensemble appartenant au filtre (intersection de deux éléments du filtre) et de cardinal strictement inférieur à n_0. C'est absurde, donc tous les sous-ensembles du filtre contiennent B. Par ailleurs, la stabilité par inclusion supérieure assure que, réciproquement, tout ensemble contenant B appartient au filtre, qui est donc bien égal au filtre principal $\mathcal{F}_B$.

10. Tout filtre dans un ensemble fini contient évidemment des ensembles finis (un filtre n'a pas le droit d'être vide), donc est principal d'après la question précédente. Comme on l'a vu plus haut, il existe $2^n - 1$ filtres principaux sur un ensemble fini de cardinal n, donc $2^n - 1$ filtres sur ce même ensemble.

Une relation d'ordre sur les filtres.

1. Supposons que le filtre $\mathcal{F}_3$ soit **strictement** inclus dans un autre filtre $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{F}_3$ est le filtre principal engendré par le sous-ensemble $\{1\}$ (il est constitué de tous les sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$ contenant l'élément 1), cela signifie qu'il existe un élément de $\mathcal{G}$ ne contenant pas 1. Mais comme $\{1\} \in \mathcal{F}_3 \subset \mathcal{G}$, l'intersection de $\{1\}$ et de cet élément qui ne contient pas 1 devrait être dans $\mathcal{G}$, ce qui est absurde puisque cette intersection est vide. L'ensemble $\mathcal{F}_3$ est donc un ultrafiltre sur $\{1, 2, 3\}$.

2. Il n'existe pas de filtre vide par définition. Par contre, il existe toujours un filtre ne contenant qu'un seul élément, c'est le filtre $\mathcal{F}_E = \{E\}$. C'est le seul filtre de cardinal 1, et tous les autres filtres contiennent trivialement E par stabilité par inclusion supérieure, donc $\{E\}$ est le minimum de l'ensemble des filtres sur E pour notre relation. Par contre, il ne peut pas y avoir de maximum dès qu'il existe deux ultra-filtres distincts, ce qui sera le cas dès que l'ensemble E a au moins deux éléments x et y. Dans ce cas, $\mathcal{F}_{\{x\}}$ et $\mathcal{F}_{\{y\}}$ ne sont pas comparables, et ne sont inclus dans aucun autre filtre qu'eux-mêmes, donc il ne peut pas y avoir de maximum. Si E est un ensemble de cardinal 1, le filtre trivial $\{E\}$ est le seul filtre existant, il est donc à la fois minimum et maximum.

3. La transitivité de l'inclusion montre que, si $A \subset B$, alors $B \subset C \Rightarrow A \subset C$, ce qui prouve exactement que $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. Si A contient au moins deux éléments, on peut donc trouver un sous-ensemble B à un seul élément tel que $B \subset A$ (avec égalité impossible), donc $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_B$, là encore sans égalité possible (puisque $B \in \mathcal{F}_B$ mais $B \notin \mathcal{F}_A$ avec nos hypothèses), donc $\mathcal{F}_A$ n'est pas un ultrafiltre. Réciproquement, si A contient un seul élément x, et si $\mathcal{F}_A$ n'était pas un ultrafiltre, il existerait un filtre B dans lequel $\mathcal{F}_A$ est strictement inclus. Autrement dit, B contiendrait un élément n'appartenant pas à $\mathcal{F}_A$, donc un sous-ensemble ne contenant pas x (puisque $\mathcal{F}_A$ est par définition constitué de tous les sous-ensembles de E contenant x). Or, $\{x\} \in \mathcal{F}_A$, donc $\{x\} \in B$. Si on prend son intersection avec l'élément de B ne contenant pas

x, on trouve un sous-ensemble vide appartenant à B, ce qui est absurde. Le filtre $\mathcal{F}_{\{x\}}$ est donc bien un ultrafiltre.

4. On pose donc $\mathcal{F}$ un ultrafiltre et $B \subset E$ un sous-ensemble n'appartenant pas à $\mathcal{F}$. Le but est alors de prouver que $\overline{B} \in \mathcal{F}$, ce qui démontrera exactement l'implication « gauche vers droite » de la propriété demandée. On pose pour cela $\mathcal{G} = \{A \subset E \mid A \cup B \in \mathcal{F}\}$. Cet ensemble est bien sûr un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(E)$ (il contient au moins l'ensemble E tout entier, car $E \cup B = E \in \mathcal{F}$), et il ne peut pas contenir l'ensemble vide puisque $\emptyset \cup B = B \notin \mathcal{F}$ par hypothèse. De plus, il est stable par intersection : si $A_1 \cup B \in \mathcal{F}$ et $A_2 \cup B \in \mathcal{F}$, alors $(A_1 \cap A_2) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \in \mathcal{F}$ par stabilité de $\mathcal{F}$ par intersection (et distributivité de l'union par rapport à l'intersection). Enfin, il est stable par inclusion supérieure : si $A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \subset C$, alors $(A \cup B) \subset (A \cup C)$, donc $A \cup C \in \mathcal{F}$. Bref, on a démontré que $\mathcal{G}$ était un filtre. Or, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ car $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ (stabilité par inclusion supérieure). Comme $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, on a nécessairement $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Or, $\overline{B} \in \mathcal{G}$ car $\overline{B} \cup B = E \in \mathcal{F}$, ce qui prouve donc que $\overline{B} \in \mathcal{F}$ (ouf).

   Reste à prouver la réciproque : tout filtre contenant systématiquement B ou $\overline{B}$ est un ultrafiltre. Supposons donc que $\mathcal{F}$ soit un filtre vérifiant cette hypothèse, mais qu'il soit strictement inclus dans un autre filtre $\mathcal{G}$. Il existe donc un sous-ensemble $B \subset E$ appartenant à $\mathcal{G}$ mais pas à $\mathcal{F}$. Mais alors, par hypothèse, $\overline{B} \in \mathcal{F}$, donc a fortiori $\overline{B} \in \mathcal{G}$. Le filtre $\mathcal{G}$ contient donc à la fois B et $\overline{B}$, donc contient l'ensemble vide par stabilité par intersection, c'est absurde.

5. Supposons d'abord que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, et que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Si on avait $A \notin \mathcal{F}$ et $B \notin \mathcal{F}$, d'après la question précédente, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ appartiendraient à $\mathcal{F}$, donc leur intersection $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ aussi. Le filtre $\mathcal{F}$ contiendrait donc à la fois $A \cup B$ et son complémentaire, ce qui est une fois de plus absurde.

   Réciproquement, si $\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses données, et que A est un sous-ensemble quelconque de E, on peut appliquer l'hypothèse à A et à $\overline{A}$ puisque $A \cup \overline{A} = E \in \mathcal{F}$. On en déduit qu'on a toujours $A \in \mathcal{F}$ ou $\overline{A} \in \mathcal{F}$, ce qui nous ramène à la caractérisation de la question précédente : $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

6. Ce filtre ne vérifie très clairement pas la caractérisation de la question 4 : par exemple l'ensemble des entiers pairs n'a pas un complémentaire fini, et son complémentaire, l'ensemble des entiers impairs, non plus. Ce n'est donc pas un ultrafiltre.

   Les ultrafiltres principaux dans $\mathbb{N}$ sont consitués de tous les ensembles contenant un élément fixé $n_0 \in \mathbb{N}$. Mais il existe des ensembles à complémentaire fini ne contenant pas l'entier n_0 (par exemple le complémentaire du singleton $\{n_0\}$ dans $\mathbb{N}$), donc des éléments de notre filtre n'appartenant pas à l'ultrafiltre fixé, quelle que soit la valeur de n_0 choisie. Notre filtre n'est donc inclus dans aucun ultrafiltre principal.