

Devoir Maison n° 6 : corrigé

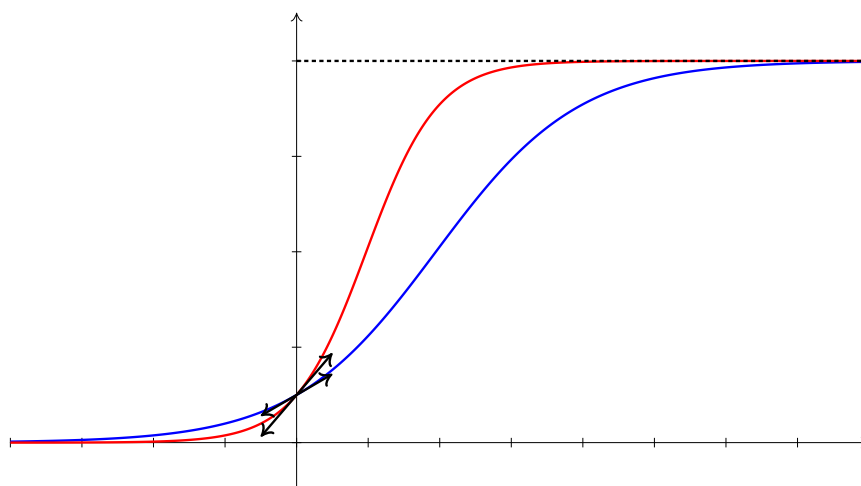
MPSI Lycée Camille Jullian

7 octobre 2026

1. (a) La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ne s'annule jamais), et $f'_n(x) = \frac{4ne^{nx}(e^{nx} + 7) - 4ne^{2nx}}{(e^{nx} + 7)^2} = \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2}$, quantité qui est manifestement toujours positive. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ quelle que soit la valeur de n .
- (b) Aucun problème du côté de $-\infty$, où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$ sans forme indéterminée. De l'autre côté, on peut factoriser en haut et en bas par e^{nx} pour obtenir $f_n(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-nx}}$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 4$. Puisqu'on nous demande le tableau de variations, faisons-le, mais ça ne va guère être passionnant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0	4

- (c) Calculons $f_n(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, et $f'_n(0) = \frac{28n}{8^2} = \frac{7n}{16}$ pour en déduire l'équation demandée : $y = \frac{7n}{16}x + \frac{1}{2}$.
- (d) Pour $n = 1$ (courbe bleue), la tangente en 0 a pour équation $y = \frac{7}{16}x + \frac{1}{2}$; pour $n = 2$ (courbe rouge) elle a pour équation $y = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2}$ (la deuxième tangente est donc tout de même deux fois plus pentue que la première) :



2. La fonction f_n étant continue et strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0, 4[$. De plus, le théorème de la bijection affirme que sa réciproque a la même monotonie, et donc le tableau de variations suivant :

x	0	4
f	$-\infty$	$+\infty$

Pour obtenir l'expression de la réciproque, on part de l'équation $f_n(x) = y$, donc $4e^{nx} = ye^{nx} + 7y$, ou encore $(4 - y)e^{nx} = 7y$. Si $y \neq 4$, on en déduit $e^{nx} = \frac{7y}{4 - y}$. Lorsque $y \in]0, 4[$, le membre de droite est strictement positif, et l'équation a pour unique solution $x = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{7y}{4 - y} \right)$. On en déduit donc que $f_n^{-1}(y) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{7y}{4 - y} \right)$.

- Posons donc $z = \frac{\ln(7)}{n} - x$, alors $e^{nz} = e^{\ln(7) - nx} = 7e^{-nx}$, et $f_n(z) - 2 = \frac{28e^{-nx}}{7(1 + e^{-nx})} - 2 = \frac{14(1 - e^{-nx})}{7(1 + e^{-nx})} = \frac{2(1 - e^{-nx})}{1 + e^{-nx}}$. Or, cette expression est bien celle d'une fonction impaire : $\frac{2(1 - e^{nx})}{1 + e^{nx}} = \frac{2e^{nx}(e^{-nx} - 1)}{e^{nx}(e^{-nx} + 1)} = -\frac{2(1 - e^{-nx})}{1 + e^{-nx}}$.
- La première affirmation est fausse mais la deuxième est vraie : le réel 2 qui appartient à $]0, 4[$ admet toujours un antécédent par f_n (donc il existe bien une solution à l'équation $f_n(x) = 2$ quel que soit l'entier n), mais cet antécédent n'est pas toujours le même (autrement dit, il n'existe pas un x commun à toutes les valeurs de n vérifiant $f_n(x) = 2$).